

ملتف متغیر کے تفاعل

Multaj Mutaghaiir ka
Tafaaul

Sastwarker, J.T.



سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

نشان ۳۶۱

ملتف متغیّر کے تفاعل

Functions of a Complex Variable

برائے بی اے

مرتبۂ

جے تیرتھ ساستورکر صاحب ام۔اے

لکچرار ریاضی کلیۂ بلدہ حیدرآباد دکن

بعد نظر ثانی

محمد خواجہ محی الدین صاحب ام۔اے

ریڈر شعبۂ ریاضی جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۶۶ھ م سنہ ۱۳۵۶ف م سنہ ۱۹۴۷ء

مطبوعۂ

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن





دیباچہ

مجلس نصاب ریاضی جامعۂ عثمانیہ نے ۱۳۵۲ف میں، بی۔اے کے ریاضی کے نصاب پر جو نظر ثانی کی، اُس کے نتیجہ کے طور پر ملتف متغیر کے نظریہ کو ریاضی کے نصاب میں داخل کیا گیا۔ اُردو زبان میں اِس نظریہ پر بی۔اے کے معیار کی کوئی کتاب موجود نہیں ہے اور نہ کسی انگریزی کتاب کا اُردو ترجمہ ایسا شایع ہوا ہے، جس سے طلبہ مستفید ہوسکیں۔ موجودہ تالیف کا مقصد طلبہ کی اسی شدید ضرورت کی تکمیل ہے۔

اس تالیف کو (Macrobert) کی انگریزی کتاب (Functions of a Complex Variable) کے اساس پر مرتب کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔

علاوہ ازیں دیگر مستند انگریزی کتابوں سے معیاری سوالات اخذ کر کے اس میں شامل کیے گئے ہیں تاکہ نفس مضمون اچھی طرح طلبہ کے ذہن نشین ہوسکے۔

سررشتۂ ہذا کے ایما پر مسٹر جے تیرتھ ساسنور کر ام۔اے۔ لکچرار ریاضی کلیۂ بلدہ نے اِس تالیف کو پروفیسر کشن چند صاحب صدر شعبۂ ریاضی جامعۂ عثمانیہ کے مشورہ کے مطابق مرتب کیا ہے۔ صاحب موصوف اور محمد خواجہ محی الدین صاحب نے اس کتاب کی نظر ثانی کی زحمت بھی گوارا فرمائی ہے جو ہمارے شکریہ کے مستحق ہیں۔

ریاضی کی کئی ایک مفید تالیفات اس وقت سررشتۂ ہذا میں زیر تالیف وطبع ہیں، جن کی اشاعت سے اُردو زبان میں بیش بہا فنّی معلومات کے اضافے کی توقع کی جاسکتی ہے۔

محمد نظام الدین

ناظم سررشتۂ تالیف وترجمہ جامعۂ عثمانیہ

المرقوم یکم فروردی ۱۳۵۶ف

فہرست مضامین

باب اوّل

ملتف اعداد اور اُن کی ہندسی تعبیر

نشان سلسلہ		صفحات

باب دوم

ڈی مائرے کا مسئلہ

امثلہ نمبری (۲)

باب سوم

لامتناہی سلسلے۔ قوت نمائی۔ لوکارتمی۔ دائری اور زائدی تفاعل

امثلہ نمبری (۳)

باب چہارم

ملتف متغیر کے تفاعل

امثلہ نمبری (۴)

باب پنجم

مساواتوں کی اصلیں۔ شاخ اور شاخ نقطے

باب ششم

ابدال اور ہم شکل تعبیر

باب ہفتم

ملتف تکمل اور کوشی کا مسئلہ

نشان سلسلہ | صفحات

امثلہ نمبری (۷)

باب ہشتم

لاتناہی سلسلے اور اُن کا اِستدقاق

امثلہ نمبری (۸)

باب اوّل

ملتف اعداد اور ان کی ہندسی تعبیر

۱۔ **ملتف اعداد کی تعریف**۔ کوئی عدد جو (ا + خ ب) کی شکل کا ہو، جہاں ا اور ب حقیقی عدد ہیں اور خ، $\sqrt{-1}$ ہے ملتف عدد کہلاتا ہے۔ اگر ب = صفر تو عدد کو خالص حقیقی اور ا = صفر تو اس کو خالص خیالی کہتے ہیں۔ اگر ا + خ ب = صفر تو ا = ب = صفر ورنہ خ = − ا/ب، یعنے ایک خالص حقیقی عدد = ایک خیالی مقدار کے جو صریحاً ناممکن ہے۔ اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر دو ملتف اعداد مساوی ہوں تو وہ متماثلاً مساوی ہونگے، کیونکہ اگر (ا + خ ب) = (اَ + خ بَ) تو (ا − اَ) + خ (ب − بَ) = صفر اور اوپر سے حاصل ہوتا ہے کہ ا = اَ اور ب = بَ۔

ہم عام ملتف عدد (ی) کی بجائے (لا + خ ما) لکھیں گے۔ ملتف اعداد (لا + خ ما) اور (لا − خ ما) جن کے حقیقی حصے وہی ہیں۔ لیکن خیالی حصے مساوی اور مختلف العلامت ہیں، **مزدوج اعداد** کہلاتے ہیں۔ ان کا مجموعہ ۲ لا حقیقی ہے۔ اور فرق (۲ خ ما) خالص خیالی ہے۔ ان کا حاصل ضرب (لا + خ ما) (لا − خ ما) = لا^{2} − (خ ما)^{2} = لا^{2} + ما^{2} منفی نہیں ہو سکتا

ان کا حاصل ضرب صفر اُسی وقت ہوتا ہے جبکہ لا = ما = صفر، ہم ی کے مزدوج
کو یَ سے تعبیر کرینگے -

ی کا مقیاس جس کو |ی| لکھتے ہیں کی تعریف + √(لا^۲ + ما^۲) سے
کی جاتی ہے - تعریف سے ظاہر ہے کہ |ی| = صفر اُسی وقت ہوتا ہے جب کہ
لا = ما = صفر

ابتدائی اعمال :- اگر ی = لا + خ ما اور یَ = لاَ + خ ماَ تو ہم
حسب ذیل تعریفات کرتے ہیں -

(۱) ی + یَ = (لا + لاَ) + خ (ما + ماَ)

(۲) - ی = (- لا - خ ما)

(۳) ی - یَ = (لا - لاَ) + خ (ما - ماَ)

(۴) ی یَ = (لا + خ ما) (لاَ + خ ماَ) = (لالاَ - ماماَ) + خ (لاماَ + لاَما)

ابتدائی اعمال کی اِس تعریف سے ہم دیکھتے ہیں کہ جبر و مقابلہ کے اساسی اصول
ملتف اعداد سے بھی پورے ہوتے ہیں -

(ا) جمع کے مبادلت پذیر (Commutative) اور تلازمی
(Associative) اُصول برقرار رہتے ہیں -

ی۱ + ی۲ = ی۲ + ی۱

ی۱ + (ی۲ + ی۳) = (ی۱ + ی۲) + ی۳ = ی۱ + ی۲ + ی۳

(ب) حاصل ضرب کے بھی وہی اصول برقرار رہتے ہیں -

ی۱ ی۲ = ی۲ ی۱

ی۱ (ی۲ ی۳) = (ی۱ ی۲) ی۳ = ی۱ ی۲ ی۳

(ج) تقسیمی Distributive قاعدہ درست رہتا ہے -

(ی۱ + ی۲) ی۳ = ی۱ ی۳ + ی۲ ی۳

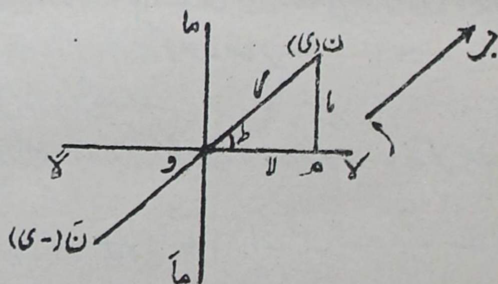
مثال کے طور پر ہم حاصل ضرب کا مبادلت پذیر اصول ثابت کرتے ہیں
دوسرے قاعدوں کو بھی اس طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے -

ی۱ ی۲ = (لا۱ + خ ما۱) (لا۲ + خ ما۲) = (لا۱لا۲ - ما۱ما۲) + خ (لا۱ما۲ + لا۲ما۱)

=(لا$_2$ لا$_1$ − ما$_2$ ما$_1$) + خ (لا$_2$ ما$_1$ + لا$_1$ ما$_2$) = ی$_2$ ی$_1$

ہم دیکھتے ہیں کہ ملتف اعداد کے درمیان درجہ (Order) نہیں ہوتا ۔ ملتف اعداد کے لیے ایک ملتف عدد دوسرے ملتف عدد سے بڑا ہے یا چھوٹا ہے کوئی معنی نہیں رکھتا ۔ ملتف اعداد کی صورت میں لاتساویات صرف مقیاسوں کے درمیان رشتوں میں واقع ہو سکتی ہیں ۔

۲ ۔ آرگینڈ کی شکل :۔ قائم محوروں کے نظام لَا و لا ، مَا و ما کے مستوی میں نقطہ ن کو مرتسم کرو ۔ جہاں نقطہ ن کے محدّد اِن محوروں کے حوالہ سے (لا ، ما) ہیں (شکل ۱) تب ہم اس نقطہ کو عدد (لا + خ ما) کو تعبیر کرنے



شکل (۱)

کے لیے استعمال کر سکتے ہیں ۔ مستوی میں ہر ایک عدد کے جواب میں ایک اور صرف ایک نقطہ ہے ۔ لا محور پر کے نقاط خالص حقیقی اعداد کو اور ما محور پر کے نقاط خالص خیالی اعداد کو ظاہر کرتے ہیں اور مبداء نقطہ صفر کو تعبیر کرتا ہے ۔ اگر ہم کو کوئی عدد (لا + خ ما) دیا جائے تو ہم اس کے متناظر محدّد (لا ، ما) معلوم کر سکتے ہیں اور عدد کو اس نقطہ سے ظاہر کر سکتے ہیں ۔

جس شکل میں اعداد تعبیر کیے جاتے ہیں اُس کو **آرگینڈ کی شکل** کہتے ہیں ۔
یہ عام طور پر رائج ہے کہ (لا + خ ما) کی بجائے ی لکھا جائے اور اس

مستوی کو ی کا مستوی کہیں۔

و کو مبداء اور ولا کو ابتدائی خط قرار دو۔ نیز فرض کرو کہ نقطہ ن کے قطبی محدّد (ر، طہ) ہیں۔ تب ر = ون = $\sqrt{لا^2 + ما^2}$

$$جم\ طہ = \frac{لا}{ر}،\quad جب\ طہ = \frac{ما}{ر}$$

اور ی = (لا + خ ما) = ر (جم طہ + خ جب طہ)

ون یا ر کو ی کا مقیاس کہتے ہیں اور لکھتے ہیں |ی|۔ ر سے ون کی مثبت قیمت تعبیر ہوتی ہے۔

طہ کو ی کی دلیل کہتے ہیں اور اس کو لکھتے ہیں دلیل (ی)۔ یہ ظاہر ہے کہ دلیل کی قیمتوں کی مقدار لا انتہا ہے اِن میں سے کسی دو قیمتوں کا فرق ۲ π کا کوئی ضعف ہوتا ہے۔ اُس قیمت کو جو لا تساویات - π < طہ ≤ π کو پورا کرتی ہے دلیل کی صدر قیمت کہتے ہیں۔

قائم اور قطبی محدّد باہم رشتوں لا = ر جم طہ، ما = ر جب طہ

ر = + $\sqrt{لا^2 + ما^2}$ اور مس طہ = $\frac{ما}{لا}$ سے مربوط ہیں۔

اِن سے حاصل ہوتا ہے کہ ی = لا + خ ما = ر (جم طہ + خ جب طہ)

یہ ایک مساوات ہے جو ی کو اُس کے مقیاس اور دلیل کی رقوم میں بیان کرتی ہے۔

۳۔ ملتف عدد کی سمتی تعبیر:-

اگر ر اور طہ دیے ہوئے ہوں تو نقطہ ن کو یگانا طور پر معلوم کیا جا سکتا ہے اور ہم عدد ی کو ایک سمتیہ کے ذریعہ جس کا طول ر ہو اور جو لا محور کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ طہ بنائے، ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہ ضروری نہیں ہے کہ سمتیہ کو مبدأ میں سے ہی کھینچا جائے لیکن یہ خط مستوی میں کہیں ہو سکتا ہے بشرطیکہ اس کا طول اور اس کی سمت مناسب ہو۔ یعنے اگر نقطہ ن عدد ی کو ظاہر کرے تو سمتیہ ون بھی عدد ی کو تعبیر کرے گا۔ اس کے علاوہ ایک خط ا ب کو بھی جو ون

کے مساوی اور متوازی ہے اور و ن کی سمت میں کھنچا ہوا ہے عددی 'کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ $\overleftarrow{\text{اب}}$ کو سمتیہ کہتے ہیں۔ شکل (ا) سے ظاہر ہے کہ

$$\overleftarrow{\text{اب}} = - \overleftarrow{\text{با}}$$

اِس لیے معلوم ہوا کہ ملتف عدد کو ظاہر کرنیکے لیے دو طریقے اختیار کیے جا سکتے ہیں۔ ایک تو اس کو آرگینڈ کی شکل میں ایک نقطہ سے اور دوسرے ی مستوی میں ایک سمتیہ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ عام طور پر دونوں طریقے استعمال کیے جائیں اور محض ایک کو چھوڑ کر دوسرا نہ اختیار کریں۔

مثلاً شکل (ا) میں نقطہ ن جس کے محدد (لا، ما) ہیں عددی = (لا + خ ما) کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز سمتیہ $\overleftarrow{\text{ون}}$ بھی اس عدد کو تعبیر کرتا ہے۔ عدد (- ی) نقطہ نَ سے تعبیر ہوتا ہے جس کے محدد (- لا، - ما) ہیں اور اس کا متناظر سمتیہ ہے $\overleftarrow{\text{ونَ}}$ جو ون کے مساوی ہے مگر اس کی سمت، ون کی سمت کے مخالف ہے

مثال (ا):- آرگینڈ کی شکل میں، اعداد (ا)، (خ)، (-ا) اور (-خ) بالترتیب نقاط ا، ب، ج اور د (شکل ۲) سے ظاہر کیے گئے ہیں اور اس کے متناظر سمتیے ہیں $\overline{\text{وا}}$، $\overline{\text{وب}}$، $\overline{\text{وج}}$ اور $\overline{\text{ود}}$ جن میں سے ہر ایک کا طول اکائی ہے اور اُن کے دلیل کی صدر قیمتیں صفر، $\frac{1}{2}\pi$، $\pm\pi$، $-\frac{1}{2}\pi$ ہیں۔ اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں۔

شکل (۲)

ا = (جم صفر + خ جب صفر)

خ = ا (جم $\frac{\pi}{2}$ + خ جب $\frac{\pi}{2}$)

-ا = ا (جم π + خ جب π)، - خ = ا $\left\{\text{جم}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \text{خ جب}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

عدد (ا + خ) نقطہ ع سے تعبیر کیا گیا ہے۔ جس کے محدد (ا، ا) ہیں۔ اس لیے

و ع = $\sqrt{2}$ ، اور لا و ع = $\frac{\pi}{4}$ ، اِس لیے (۱ + خ)

= $\sqrt{2}$ (جم $\frac{\pi}{4}$ + خ جب $\frac{\pi}{4}$)

مثال (۲) :- اُس نقطہ ی کا طریق دریافت کرو ، جو اس طرح بدلتا ہے کہ | ی | = ج ، جہاں ج ایک حقیقی مثبت مستقل ہے -

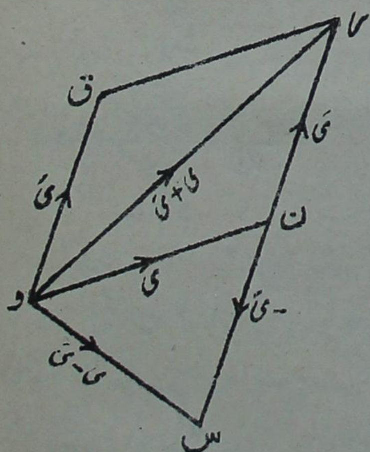
اِس شرط کا ہندسی مفہوم یہی ہے کہ مبداء سے نقطہ ی کا فاصلہ ہمیشہ ج کے مساوی ہے - اِس لیے ی کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز مبداء پر ہے اور نصف قطر ج ہے -

مثال (۳) :- اگر ی اِس طرح بدلے کہ ی کی دلیل ہمیشہ مستقل رہے ، تو ی کا طریق معلوم کرو - ظاہر ہے کہ یہ طریق ایک خط مستقیم ہوگا جو مبداء سے گزرتا ہے -

۴ - دو ملتف عددوں کے جمع اور تفریق کی ہندسی تعبیر -

فرض کرو کہ ن اور ق ، بالترتیب نقاط ی = لا + خ ما اور یَ = لاَ + خ ماَ ہیں (شکل ۳) متوازی الاضلاع و ن ر ق کو مکمل کرو - اب ن ر اور و ق مساوی اور متوازی ہیں اس لیے حوالہ کے محوروں پر اِنکے ظل مساوی ہیں اِس لیے نقطہ ر کے محدد ہیں (لا + لاَ ، ما + ماَ). اس لیے ر ، ن اور ق سے تعبیر ہونے والے عددوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے - سمتیوں کی ترقیم میں

$\overline{\text{ور}} = \overline{\text{ون}} + \overline{\text{وق}}$



شکل (۳)

دو ملتف عددوں کے فرق کو

ظاہر کرنے کے لیے ہم اوپر کا جمع کا عمل عددوں (لا + خ ما) اور ۔(لاَ + خ ماَ) پر کرتے ہیں اِس لیے اگر سان کو س تک خارج کیا جائے تو

ن س = ن ر طول میں، سمتیہ $\overline{ن س}$ جو و ق کے مساوی اور مخالف سمت میں ہے ۔(لاَ + خ ماَ) کو تعبیر کرتا ہے ۔تب

$$\overline{و س} = \overline{و ن} + \overline{ن س}$$

اور اس لیے و س عدد { (لا + خ ما) ۔ (لاَ + خ ماَ) } کو ظاہر کرتا ہے ۔

یہ ضروری نہیں ہے کہ عمل کے لیے مبداء کا انتخاب کریں ۔

چونکہ مثلث کا ایک ضلع مثلث کے دوسرے دو ضلعوں کے مجموعہ سے بڑا نہیں ہوسکتا ۔اِس سے حاصل ہوتا ہے کہ

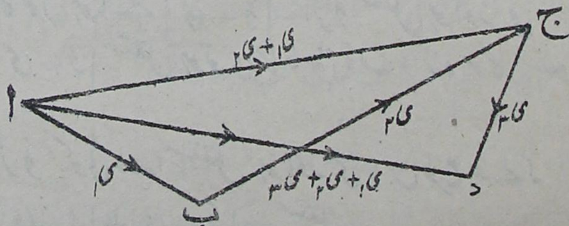
و ن + ن ر ≥ و ر

اور اس لیے |ی| + |یَ| ≥ |ی + یَ|

اس نتیجہ کو ہم لکھ سکتے ہیں ۔

دو ملتف مقداروں کے مجموعے کا مقیاس اُن کے علٰحدہ علٰحدہ مقیاسوں کے مجموعے سے کم یا مساوی ہوتا ہے۔ دو ملتف عددوں کو جمع کرنے کے اِس عمل کو کسی تعداد کے لیے بڑھایا جاسکتا ہے ۔

فرض کرو کہ سمتیے $\overline{ا ب}$، $\overline{ب ج}$، $\overline{ج د}$ (شکل ۴) بالترتیب



شکل (۴)

$ی_۱$، $ی_۲$، $ی_۳$ کو تعبیر کرتے ہیں۔

تب $\overline{اج}$ عدد $(ی_۱ + ی_۲)$ کو ظاہر کرتا ہے۔ اور $\overline{اد}$ عدد $(ی_۱ + ی_۲ + ی_۳)$ کو ظاہر کریگا۔

چونکہ $\overline{اد}$ کا طول $\overline{اب}$، $\overline{بج}$ اور $\overline{جد}$ کے طول سے بڑا نہیں ہو سکتا

اس لیے $|ی_۱| + |ی_۲| + |ی_۳| \geq |ی_۱ + ی_۲ + ی_۳|$

اسی طرح کا عمل ن عددوں کے ساتھ کرنے سے ہم کو ذیل کا اہم مسئلہ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ ۱:۔ ملتف مقداروں کے کسی تعداد کے مجموعے کا مقیاس، اُن کے مقیاسوں کے مجموعے کے مساوی یا اُن سے کم ہوتا ہے۔

ملتف مقداروں کے مقیاسوں کے متعلق حسب ذیل مسئلہ بھی غور طلب ہے۔ طالب علم اِس مسئلہ کی تصدیق خود کرے۔

مسئلہ ۲:۔ دو ملتف مقداروں کے فرق مقیاس، اُن کے مقیاسوں کے فرق کے مساوی یا اُن سے بڑا ہوتا ہے۔

مثال ۴:۔ وہ سمتیہ جو آرگینڈ کی شکل میں نقاط ا اور ی کو ملاتا ہے اور جس کی سمت ا سے ی کی طرف ہوتی ہے عدد (ی ــ ا) کو تعبیر کرتا ہے اور اس کا طول ہوتا ہے $|ی - ا|$۔ اگر ا مستقل ہو اور ی اِس طرح بدلے کہ $|ی - ا|$ مستقل ہو تو ی کا طریق ایک دائرہ ہوگا جس کا مرکز ا پر ہے۔

اگر اَ، کوئی دوسرا مستقل ہو اور ی اِس طرح بدلے کہ

$$|ی - ا| + |ی - اَ| = \text{مستقل}$$

تو ی کا طریق ایک ناقص ہے جس کے ماسکے ا اور اَ ہیں۔

مثال ۵:۔ فرض کرو کہ ا ب ج کوئی مثلث ہے تب سمتیے

ب ج ، ج ا اور ا ب تین ملتف اعداد کو تعبیر کرتے ہیں جن کا مجموعہ صفر ہے - یہی نتیجہ ن ضلعوں والے بند کثیر الاضلاع کے لیے بھی درست ہے

۵ - ضرب اور تقسیم

—— دو ملتف عددوں کا حاصل ضرب اور خارج قسمت بھی ملتف اعداد ہوتے ہیں - فرض کرو کہ دو ملتف اعداد ی اور یَ ہیں تب

(لا + خ ما) (لاَ + خ ماَ) = (لا لاَ - ما ماَ) + خ (لا ماَ + لاَ ما)

اور

$$\frac{\text{لا + خ ما}}{\text{لاَ + خ ماَ}} = \frac{\text{(لا + خ ما) (لاَ - خ ماَ)}}{\text{(لاَ + خ ماَ) (لاَ - خ ماَ)}} = \frac{\text{(لا لاَ + ما ماَ) + خ (لاَ ما - لا ماَ)}}{\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2}$$

اب اس طریقہ عمل کو ہندسی طریقہ پر غور کرو - کسی دو ملتف عددوں ی اور یَ کو ہم شکل

ی = ر {جم طہ + خ جب طہ} اور یَ = رَ {جم طہَ + خ جب طہَ}

میں لکھ سکتے ہیں -

جہاں ر = |ی| اور رَ = |یَ| ، طہ = دلیل ی اور طہَ = دلیل یَ

اس لیے ی × یَ = ر رَ (جم طہ + خ جب طہ) (جم طہَ + خ جب طہَ)

= ر رَ {(جم طہ جم طہَ - جب طہ جب طہَ) + خ (جب طہ جم طہَ + جم طہ جب طہَ)}

= ر رَ {جم (طہ + طہَ) + خ جب (طہ + طہَ)}

اس لیے |ی یَ| = ر رَ = |ی| × |یَ|

اور دلیل ی یَ = دلیل ی + دلیل یَ [جبکہ دلیل کی صدر قیمت لیگئی ہے]

$$\text{نیز}\ \frac{\text{ی}}{\text{یَ}} = \frac{\text{ر (جم طہ + خ جب طہ)}}{\text{رَ (جم طہَ + خ جب طہَ)}} \cdot \frac{\text{(جم طہَ - خ جب طہَ)}}{\text{(جم طہَ - خ جب طہَ)}}$$

ر ر { (جم طہ جم طہَ + جب طہ جب طہَ) + رخ (جب طہ جم طہَ ـ جب طہَ جم طہ) }
= ـــ
رَ رَ { جم² طہَ + جب² طہَ }

$= \left(\frac{ر}{رَ} \right)$ { جم (طہ ـ طہَ) + خ جب (طہ ـ طہَ) }

اس لیے $\left| \frac{ی}{یَ} \right| = \frac{ر}{رَ} = \frac{|ی|}{|یَ|}$

اور دلیل $\left(\frac{ی}{یَ} \right)$ = دلیل ی ـ دلیل یَ [جبکہ دلیل کی صدر قیمت لی گئی ہے]

اِس لیے دو ملتف مقداروں کے حاصل ضرب کا مقیاس اور دلیل بالترتیب مقیاسوں کا حاصل ضرب اور اجزائے ضربی کے دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ اور خارج قسمت کا مقیاس اور دلیل بالترتیب مقیاسوں کے خارج قسمت اور شمار کنندہ اور نسب نما کے دلیلوں کے فرق کے مساوی ہے۔

اگر ی اور یَ سے تعبیر ہونے والے سمتیے متوازی ہوں تو

(دلیل ی ـ دلیل یَ) = صفر

[جبکہ سمتیہ کی سمتیں یکساں ہوں] یا $\pm \pi$ [جبکہ سمتیہ کی سمتیں مخالف ہوں]

ہر صورت میں خارج قسمت $\frac{ی}{یَ}$ خالص حقیقی ہے۔ برعکس اس کے

اگر $\frac{ی}{یَ}$ حقیقی ہوں تو سمتیے |ی| اور |یَ| متوازی ہونگے۔

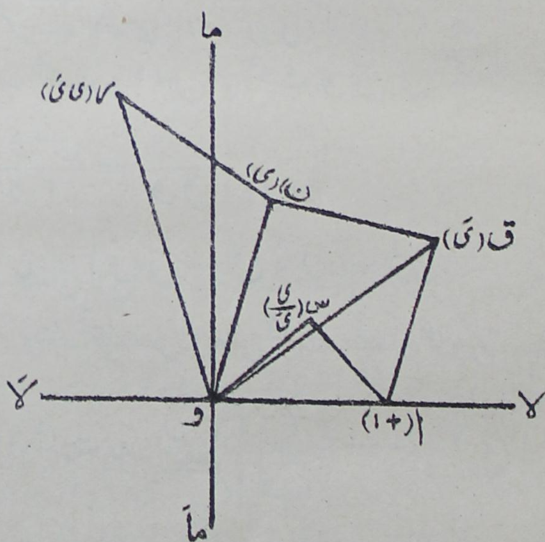
اگر سمتیے |ی| اور |یَ| علی القوائم ہوں، تو ی اور یَ کے دلیلوں کا فرق $\frac{\pi}{2}$ کا طاق ضعف ہے اور خارج قسمت خالص خیالی ہے۔ اِس کا عکس بھی درست ہے۔

خاص طور پر، ی کا متکافی

$$\frac{1}{ی} = \left(\frac{1}{ر}\right)\left\{جم(-طہ) + خ\ جب(-طہ)\right\}$$

اور اس لیے ایک عدد اور اُس کے متکافی عدد کے دلیل کی صدری قیمتیں مقداراً میں مساوی مگر علامت میں مختلف ہوتی ہیں۔

۶۔ دو ملتف عددوں کے ضرب اور تقسیم کی ہندسی تعبیر—



شکل (۵)

فرض کرو کہ شکل (۵) میں نقاط ا، ن اور ق بالترتیب عددوں ۱، ی اور یَ کے متناظر ہیں۔ ایک مثلث و ن ما اس طرح بناؤ جو مثلث و ا ق کے راست متشابہ ہو۔

تب چونکہ $\frac{\text{و ر}}{\text{و ن}} = \frac{\text{و ق}}{\text{و ا}}$ اسلئے و ر = و ن × و ق'

چونکہ و ا کا طول اکائی ہے۔

نیز ا و̂ ر = ا و̂ ن + ن و̂ ر

= ا و̂ ن + ا و̂ ق

= دلیل ی + دلیل یَ

اس لیے نقطہ ر، عدد (ی یَ) کو ظاہر کرتا ہے۔

اب مثلث و ا س کو مثلث و ق ن کے راست متشابہ بناؤ۔

تب $\frac{\text{و س}}{\text{و ا}} = \frac{\text{و ن}}{\text{و ق}}$

اِس لیے ا و̂ س = ق و̂ ن = دلیل ی ـ دلیل یَ

اِس لیے نقطہ س، خارج قسمت $\frac{\text{ی}}{\text{یَ}}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال ۱۶۔ ثابت کرو کہ دلیل $\left(\frac{\overline{\text{ا ج}}}{\overline{\text{ا ب}}}\right)$ = ب اَ ج

فرض کرو کہ و ن اور و ق بالترتیب ا ب اور ا ج کے

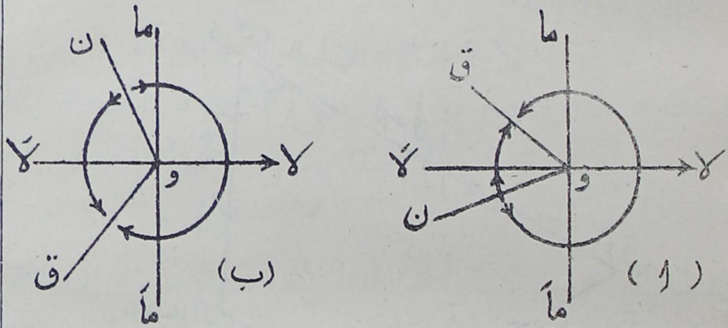
متوازی اُسی سمت میں کھینچے گئے ہیں۔

تب دلیل $\left(\frac{\overline{\text{ا ج}}}{\overline{\text{ا ب}}}\right)$ = دلیل $\overline{\text{ا ج}}$ ـ دلیل $\overline{\text{ا ب}}$

= دلیل $\overline{\text{و ق}}$ ـ دلیل $\overline{\text{و ن}}$

= ن و̂ ق = ب اَ ج

اگر اس طرح سے حاصل شدہ زاویہ مثبت {شکل ٦ (ا)} یا منفی {شکل ٦ (ب)} مکررہ ہو، تو خارج قسمت کی دلیل کی صدر قیمت پہلی صورت میں ۲ π کی کمی سے



شکل (٦)

اور دوسری صورت میں ۲ π کا اضافہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ حاصل شدہ دلیل پہلی صورت میں منفی اور دوسری صورت میں مثبت ہوتی ہے۔ "قاعدہ کے طور پر جہاں کہیں دلیل کا ذکر آئے یہ مان لیا جائے کہ صدر قیمت مراد ہے۔"

مثال ۷: ثابت کرو کہ اگر دلیل $\left\{\frac{(\text{ی}_۲ - \text{ی}_۳)\ (\text{ی}_۱ - \text{ی}_۴)}{(\text{ی}_۱ - \text{ی}_۳)\ (\text{ی}_۲ - \text{ی}_۴)}\right\} = \pi$،
تو ی۳ اور ی۴، ی۱ اور ی۲ کو ملانے والے خط کے مخالف جانبوں میں واقع ہونگے۔ اور ی۱، ی۲، ی۳ اور ی۴ ہم دائرہ ہیں۔

فرض کرو کہ ی۱، ی۲، ی۳ اور ی۴ بالترتیب نقاط شکل (۷) ا، ب، ج، د کو تعبیر کرتے ہیں۔

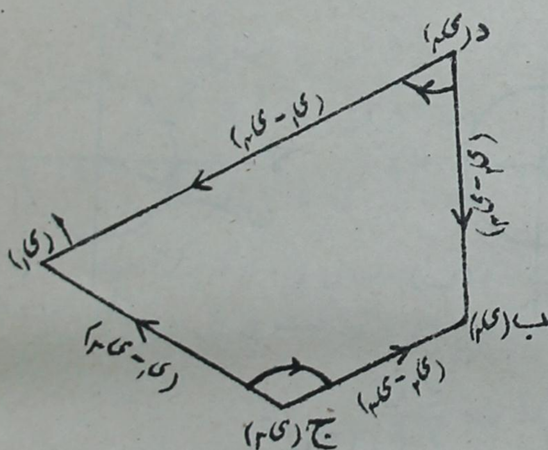
نیز دلیل $\left\{\frac{(\text{ی}_۲ - \text{ی}_۳)\ (\text{ی}_۱ - \text{ی}_۴)}{(\text{ی}_۱ - \text{ی}_۳)\ (\text{ی}_۲ - \text{ی}_۴)}\right\} =$ دلیل $\frac{(\text{ی}_۲ - \text{ی}_۳)}{(\text{ی}_۱ - \text{ی}_۳)} +$ دلیل $\frac{(\text{ی}_۱ - \text{ی}_۴)}{(\text{ی}_۲ - \text{ی}_۴)} = \pi$

اب عدد $(\text{ی}_۲ - \text{ی}_۳)$ سمتیہ $\overline{\text{ج ب}}$ ہے۔

عدد $(\text{ی}_1 - \text{ی}_3)$ سمتیہ $\overline{\text{جا}}$ ہے۔

عدد $(\text{ی}_1 - \text{ی}_4)$ سمتیہ $\overline{\text{دا}}$ ہے۔

اور عدد $(\text{ی}_2 - \text{ی}_4)$ سمتیہ $\overline{\text{دب}}$ ہے۔



شکل (۷)

$$\text{نیز دلیل}\left(\frac{\text{ی}_2 - \text{ی}_3}{\text{ی}_1 - \text{ی}_3}\right) = \text{دلیل}\frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{جا}}} = \text{ا}\hat{\text{ج}}\text{ب}$$

$$\text{اور دلیل}\left(\frac{\text{ی}_1 - \text{ی}_4}{\text{ی}_2 - \text{ی}_4}\right) = \text{دلیل}\frac{\overline{\text{دا}}}{\overline{\text{دب}}} = \text{ب}\hat{\text{د}}\text{ا}$$

اب ا$\hat{\text{ج}}$ب اور ب$\hat{\text{د}}$ا کی سمتیں یکساں ہیں اور دیا گیا ہے کہ

ا$\hat{\text{ج}}$ب + ب$\hat{\text{د}}$ا $= \pi$ ، اِسلیے ی_3 اور ی_4 ، ی_1 اور ی_2 کو ملانے والے خط کے مخالف جانب ہیں اگر ایک ہی جانب ہوتے تو ا$\hat{\text{ج}}$ب اور ب$\hat{\text{د}}$ا کی قیمتیں علامت میں مختلف ہوتیں۔

اب چونکہ ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د میں مقابل کے

دو زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ کے برابر ہے اس لیے نقاط ا ، ب ، ج ، د ہم دائری ہیں۔

مثال ۸ :- اگر ا ، ب ، ج ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راسوں کو تعبیر کرے تو ثابت کرو کہ

$$ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ - ب ج - ج ا - ا ب = صفر$$

وہ سمتیے جو عددوں ، (ب - ج) ، (ج - ا) ، (ا - ب) کو تعبیر کرتے ہیں ، مثلث کے سلسلہ وار لیے ہوئے اضلاع ہیں۔ اِن کے طول مساوی ہیں اور اِن کی دلیلوں کو شکل

$(طہ + \frac{۲\pi}{۳})$ ، $(طہ + \frac{۴\pi}{۳})$ یا طہ ، $(طہ - \frac{۲\pi}{۳})$ اور $(طہ - \frac{۴\pi}{۳})$ میں لے سکتے ہیں بموجب اس کے کہ مثلث کو کس سمت میں مرتسم کیا گیا ہے۔

ہر ایک صورت میں $\frac{(ب - ج)}{(ج - ا)} = \frac{(ج - ا)}{(ا - ب)}$ چونکہ اِس مساوات کے دونوں جانب کے عددوں کا مقیاس اکائی ہے اور وہی دلیل $(\pm \frac{۲\pi}{۳})$ ہے۔

ضرب دینے پر مساوات ہو جاتی ہے۔

$$(ب - ج)(ا - ب) = (ج - ا)^۲$$

یعنی $ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ - ا ب - ب ج - ج ا = صفر$

جو مطلوبہ شرط ہے۔ اِس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے اور وہ مشق کے طور پہ طالب علم کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے۔

مثال ۹ :- اگر ملتف اعداد ، ا ، ب ، ج ، ف ، ق اور ر کے متناظر آرگینڈ کی شکل میں بالترتیب نقاط ا ، ب ، ج ، ف ، ق ، ر ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات ا ب ج اور ف ق ر کے راست متشابہ ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے۔

$$ا (ق - ر) + ب (ر - ف) + ج (ف - ق) = صفر$$

نیز ثابت کرو کہ اگر نقاط ل، م، ن، بالترتیب اف، ب ق، ج ر پر اس طرح لیے جائیں کہ

ال / لف = ب م / م ق = ج ن / ن ر ، تو

مثلث ل م ن، ∆ ا ب ج اور ف ق ر کے راست متشابہ ہے۔

اگر مثلثات راست متشابہ ہوں، تو زاویے ب اَج، ق فَ ر مساوی ہیں اور اُسی سمت میں ہیں، نیز اج / اب = ف ر / ف ق ۔ یہ شرائط ضروری اور کافی ہیں۔

اعداد (ج - ا) / (ب - ا) اور (ر - ف) / (ق - ف) پر غور کرو۔

ان کے مقیاس بالترتیب اج / اب اور ف ر / ف ق اور ان کی دلیلیں، زاویے ب اج اور ق ف ر ہیں جن کی سمتیں یکساں ہیں۔
اس لیے اگر مثلثات راست متشابہ ہو، تو اوپر کے عددوں کے مقیاس مساوی ہیں اور دلیلیں بھی مساوی ہیں۔ اس لیے یہ متماثلاً مساوی ہیں۔ برعکس اس کے اگر اعداد مساوی ہوں تو، راست مشابہت کی شرائط پوری ہوتی ہیں۔ اِس لیے مثلثات کو راست متشابہ ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرائط ہیں۔

(ج - ا) / (ب - ا) = (ر - ف) / (ق - ف) یا ا (ق - ر) + ب (ر - ف) + ج (ف - ق) = صفر ....(۱)

دوسرے حصے کو حل کرنے کے لیے۔

فرض کروکہ ال/لف = بھ/ھق = جن/نر = ک

تب ل، ھ، ن، بالترتیب (ا+کف)/(۱+ک)، (ب+کق)/(۱+ک)، (ج+کر)/(۱+ک)

کو تعبیر کرتے ہیں - اِس کی آسانی کے ساتھ تصدیق کی جاسکتی ہے کہ، اگر ف، ق، ر کی بجائے اِن مقداروں کو درج کیا جائے تو مساوات (۱) پوری ہوتی ہے - یعنے ل ھ ن، دوسرے دو مثلثوں ا ب ج اور ف ق ر کے راست متشابہ ہے -

امثلہ نمبری (۱)

(۱) آرگینڈ کی شکل میں حسبِ ذیل نقطوں کو ظاہر کرو :-

(۲+۳خ)، ۱/(۲+۳خ)، (۱+خ)/(۱-خ)، (۱+۲خ)(۵+۷خ)/((۳+۴خ)(۶+خ))

(۲) ثابت کروکہ نقاط (-۱)، (۱)، اور (خ √۳) ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں -

(۳) ثابت کروکہ اُس مثلث کا نقطۂ وسطی جس کے راس ی۱، ی۲، ی۳ ہیں (ی۱ + ی۲ + ی۳)/۳ ہے -

(۴) ثابت کروکہ |جم طہ + خ جب طہ| = ۱

(۵) ثابت کروکہ دو مزدوج عددوں کے خارج قسمت کا مقیاس اکائی ہے -

(۶) اگر ی = (لا+خ ما) تو ثابت کروکہ |لا| ⩽ |ی| اور |ما| ⩽ |ی|

(۷) ثابت کروکہ دلیل (ی) - دلیل (-ی) = ± π، بموجب اس کے دلیل ی مثبت ہے یا منفی

(۸) اگر |ی۱| = |ی۲| اور دلیل (ی۱) + دلیل (ی۲) = صفر، تو ثابت

کرو کہ ی_1 اور ی_2 مزدوج اعداد ہیں۔

(۹) حسبِ ذیل طریق کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

(ا) $|\text{ی}+1|^2 - |\text{ی}-1|^2 = 2$

(ب) $\text{دلیل}\left\{\frac{(\text{ی}-1)}{(\text{ی}+1)}\right\} = \frac{\pi}{2}$

(۱۰) ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جس کے راس ی_1، ی_2، ی_3 ہیں

$$\sum\left\{\frac{(\text{ی}_2-\text{ی}_3)\,|\text{ی}_1|^2}{4\,\text{خ}\,\text{ی}_1}\right\}$$ ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ اگر $\text{دلیل}\,\frac{(\text{ی}_2-\text{ی}_3)}{(\text{ی}_1-\text{ی}_3)} = \text{دلیل}\,\frac{(\text{ی}_2-\text{ی}_4)}{(\text{ی}_1-\text{ی}_4)}$ تو نقاط ی_3 اور ی_4، ی_1 اور ی_2 کو ملانے والے خط کے ایک ہی جانب ہیں اور ی_1، ی_2، ی_3، ی_4 ہم دائری ہیں۔

(۱۲) فرض کرو کہ ا، ب، ج اور د نقاط ی_1، ی_2، ی_3 اور ی_4 ہیں ثابت کرو کہ اگر $\text{ی}_1\text{ی}_2 + \text{ی}_3\text{ی}_4 =$ صفر اور $\text{ی}_1 + \text{ی}_2 =$ صفر تو ا، ب، ج اور د مشترک المحیط ہیں اور مثلثات ا و ج اور د و ا متشابہ ہیں۔

(۱۳) اگر $\frac{\overline{\text{اج}}}{\overline{\text{جب}}} = -\frac{\overline{\text{اد}}}{\overline{\text{دب}}}$ اور اگر ا، ب، ج، د نقاط ی_1، ی_2، ی_3، ی_4 ہوں تو ثابت کرو کہ ا، ب، ج، د مشترک المحیط ہیں اور $(\text{ی}_1+\text{ی}_2)(\text{ی}_3+\text{ی}_4) = 2(\text{ی}_1\text{ی}_2 + \text{ی}_3\text{ی}_4)$ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ مثلثات او ج اور د و ا متشابہ ہیں جہاں و، اب کا وسطی نقطہ ہے۔

(۱۴) ثابت کرو کہ اگر ی_1، ی_2، ی_3 مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہوں تو

$$\text{ی}_1^2 + \text{ی}_2^2 + \text{ی}_3^2 = \text{ی}_1\text{ی}_2 + \text{ی}_2\text{ی}_3 + \text{ی}_3\text{ی}_1$$

(۱۵) اگر ی_1، ی_2، ی_3 قائمۃ الزاویہ مثلث مساوی الساقین کے راس ہوں جہاں

راس ی۲ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ی}_1^2 + 2\,\text{ی}_2^2 + \text{ی}_3^2 = 2\,\text{ی}_2(\text{ی}_1 + \text{ی}_3)$$

(۱۶) ثابت کرو کہ منحنی $\left|\frac{\text{ی}-1}{\text{ی}+1}\right| =$ مستقل اور دلیل $\left(\frac{\text{ی}-1}{\text{ی}+1}\right) =$ مستقل علی التوائم دائرے ہیں۔

(۱۷) ثابت کرو کہ $|\text{ی}_1+\text{ی}_2|^2 + |\text{ی}_1-\text{ی}_2|^2 = 2\left\{|\text{ی}_1|^2 + |\text{ی}_2|^2\right\}$ اور اس مساوات کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

(۱۸) ثابت کرو کہ دو مثلث جن کے راس بالترتیب ا_1، ا_2، ا_3 اور ب_1، ب_2، ب_3 ہیں راست متشابہ ہیں۔

اگر

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 & 1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 & 1 \\ \text{ا}_3 & \text{ب}_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(۱۹) اس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ نقاط ی۱، ی۲، ی۳، ی۴ ہم دائری ہوں یہ ہے کہ

$$\frac{(\text{ی}_3-\text{ی}_1)(\text{ی}_4-\text{ی}_2)}{(\text{ی}_3-\text{ی}_2)(\text{ی}_4-\text{ی}_1)}$$ حقیقی ہو۔

(۲۰) اگر $(\text{ی}_1-\text{ی}_2)(\text{ی}'_1-\text{ی}'_2) = (\text{ی}_2-\text{ی}_3)(\text{ی}'_2-\text{ی}'_3) = (\text{ی}_3-\text{ی}_1)(\text{ی}'_3-\text{ی}'_1)$ تو ثابت کرو کہ وہ مثلث جن کے راس ی۱، ی۲، ی۳ اور ی'۱، ی'۲، ی'۳ ہیں مساوی الاضلاع مثلث ہیں۔

باب دوم

ڈی مائرے (De Moivre) کا مسئلہ

۷۔ ڈی مائرے کا مسئلہ —

فرض کرو کہ طہ۱ اور طہ۲ کوئی دو زاویے ہیں تب

(جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲) = جم طہ۱ جم طہ۲ − جب طہ۱ جب طہ۲

+ خ (جب طہ۱ جم طہ۲ + جم طہ۱ جب طہ۲)

= جم (طہ۱ + طہ۲) + خ جب (طہ۱ + طہ۲)

اسی طرح کے تیسرے جزو ضربی سے ضرب دینے سے

(جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲) (جم طہ۳ + خ جب طہ۳)

= [جم (طہ۱ + طہ۲) + خ جب (طہ۱ + طہ۲)] [جم طہ۳ + خ جب طہ۳]

= جم (طہ۱ + طہ۲ + طہ۳) + خ جب (طہ۱ + طہ۲ + طہ۳)

اسی طرح کا عمل ن اجزائے ضربی کے لیے کرنے سے

(جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲) ..... (جم طہن + خ جب طہن)

= جم (طہ۱ + طہ۲ + ... + طہن) + خ جب (طہ۱ + طہ۲ + ... + طہن)

اگر ہم رکھیں طہ۱ = طہ۲ = طہ۳ = ... = طہن = طہ، تو نتیجہ ہو جاتا ہے

(جم طہ + خ جب طہ)^ن = جم ن طہ + خ جب ن طہ، جہاں ن ایک

مثبت صحیح عدد ہے۔

ہم اب بتائینگے کہ یہ نتیجہ کسی منطق عدد ن کے لیے درست ہے چاہے ن مثبت ہو یا منفی۔

فرض کرو کہ عہ ایسا عدد ہے کہ

(جم طہ + خ جب طہ)$^{\frac{ف}{ق}}$ = جم عہ + خ جب عہ، جہاں ف اور ق مثبت صحیح اعداد ہیں

تب (جم طہ + خ جب طہ)^{ف} = (جم عہ + خ جب عہ)^{ق}

یعنے جم (ف طہ) + خ جب (ف طہ) = جم (ق عہ) + خ جب (ق عہ)

حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ہمارا ابتدائی مفروضہ صحیح ہے اگر عہ = $\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}}$ ۔ عہ کی یہ صرف ایک ہی ممکنہ قیمت نہیں ہے اور قیمتیں بھی ہوسکتی ہیں جن کو ہم آگے بتائینگے۔

اِس لیے (جم طہ + خ جب طہ)$^{\frac{ف}{ق}}$ کی ایک قیمت

(جم $\frac{\text{طہ ف}}{\text{ق}}$ + خ جب $\frac{\text{طہ ف}}{\text{ق}}$) ہے۔

اب فرض کرو کہ م ایک منفی صحیح عدد یا کسر ہے۔

چونکہ (جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ − خ جب طہ) = جم^2 طہ + جب^2 طہ = ۱

اس لیے (جم طہ + خ جب طہ)^{م} = (جم طہ − خ جب طہ)$^{-م}$

= [جم (− طہ) + خ جب (− طہ)]$^{-م}$

= جم م طہ + خ جب م طہ

اوپر کے نتائج سے چونکہ (− م) مثبت ہے۔

اب ہم ڈی مائرے کے مسئلہ کو اِس کی عام شکل میں بیان کرتے ہیں۔

ن کی ہر منطق قیمت [مثبت، منفی، صحیح یا کسور] کے لیے

(جم طہ + خ جب طہ)^ن کی قیمت یا اسکی کئی قیمتوں میں سے ایک قیمت

(جم ن طہ + خ جب ن طہ) ہے۔

نوٹ:۔ اگر ن غیر منطق ہو تو بھی ڈی مائرے کا مسئلہ درست ہے۔

۸۔ ڈی مائرے کے مسئلہ سے نتائج

فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تب

(جم ۲ن طہ + خ جب ۲ن طہ) = (جم طہ + خ جب طہ)^۲ن

= (جم طہ)^۲ن + ۲ن ج۱ (جم طہ)^۲ن-۱ خ جب طہ + ۲ن ج۲ (جم طہ)^۲ن-۲ (خ جب طہ)^۲

+ .... + (خ جب طہ)^۲ن

حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

جم ۲ن طہ = (جم طہ)^۲ن − ۲ن ج۲ (جم طہ)^۲ن-۲ جب^۲ طہ

+ ۲ن ج۴ (جم طہ)^۲ن-۴ جب^۴ طہ + ... + (−جب^۲ طہ)^ن

اور جب ۲ن طہ = ۲ن ج۱ (جم طہ)^۲ن-۱ جب طہ − ۲ن ج۳ (جم طہ)^۲ن-۳ جب^۳ طہ

+ ۲ن ج۵ جم طہ^۲ن-۵ جب^۵ طہ + ... + (−۱)^ن-۱ ۲ن ج۲ن-۱ جم طہ (جب طہ)^۲ن-۱

اسی طرح سے

جم (۲ن + ۱) طہ + خ جب (۲ن + ۱) طہ = (جم طہ + خ جب طہ)^۲ن+۱

= (جم طہ)^۲ن+۱ + (۲ن + ۱) ج۱ (جم طہ)^۲ن خ جب طہ

+ (۲ن + ۱) ج۲ (جم طہ)^۲ن-۱ (خ جب طہ)^۲ + ... + (خ جب طہ)^۲ن+۱

اور اس لیے $\text{جم}(۲\text{ن}+۱)\text{طہ} = (\text{جم طہ})^{۲\text{ن}+۱} - (۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۲}\,(\text{جم طہ})^{۲\text{ن}-۱}\,\text{جب طہ}$

$$+(۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۴}\,(\text{جم طہ})^{۲\text{ن}-۱}\,\text{جب}^{۴}\,\text{طہ} + \cdots + (-۱)^{\text{ن}}(۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۲\text{ن}}\,(\text{جم طہ})(\text{جب طہ})^{۲\text{ن}}$$

$$\text{جب}(۲\text{ن}+۱)\text{طہ} = (۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۱}\,\text{جم طہ}^{۲\text{ن}}\,\text{جب طہ} - (۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۳}\,(\text{جم طہ})^{۲\text{ن}-۲}(\text{جب طہ})^{۳} +$$

$$(۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۵}\,(\text{جم طہ})^{۲\text{ن}-۳}(\text{جب طہ})^{۵} + \cdots\cdots + (-۱)^{\text{ن}}(\text{جب طہ})^{۲\text{ن}+۱}$$

تقسیم کرنے پر مس ۲ن طہ

$$= \frac{۲\text{ن}\,\text{ج}_{۱}\,\text{ت} - ۲\text{ن}\,\text{ج}_{۳}\,\text{ت}^{۳} + \cdots\cdots + (-۱)^{\text{ن}-۱}\,۲\text{ن}\,\text{ج}_{۲\text{ن}-۱}\,\text{ت}^{۲\text{ن}-۱}}{۱ - ۲\text{ن}\,\text{ج}_{۲}\,\text{ت}^{۲} + \cdots\cdots\cdots + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{ت}^{۲\text{ن}}}$$

جہاں $\text{ت} = \text{مس طہ}$

اور مس $(۲\text{ن}+۱)$ طہ

$$= \frac{(۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۱}\,\text{ت} - (۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۳}\,\text{ت}^{۳} + \cdots\cdots + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{ت}^{۲\text{ن}+۱}}{۱ - (۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۲}\,\text{ت}^{۲} + \cdots\cdots + (-۱)^{\text{ن}}(۲\text{ن}+۱)\,\text{ج}_{۲\text{ن}}\,\text{ت}^{۲\text{ن}}}$$

۹ - اکائی کے ن جذر

—— اب ہم ڈی مائیرے کے مسئلہ کی مدد سے اکائی کے ن جذر معلوم کرینگے، جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ یعنے دوسرے الفاظ میں ہم مساوات $\text{ی}^{\text{ن}} = ۱$ کو حل کرینگے جس کی ن واضح قیمتیں ہوتی ہیں۔

چونکہ $\text{جم}\,۰ = ۱$ اور $\text{جب}\,۰ = ۰$

اس لیے $۱ = \text{جم}\,۰ + \text{خ}\,\text{جب}\,۰$

یعنے $۱^{\frac{۱}{\text{ن}}} = [\text{جم}\,۰ + \text{خ}\,\text{جب}\,۰]^{\frac{۱}{\text{ن}}}$

$$= \left[\text{جم}\,(۲\text{ک}\,\pi + ۰) + \text{خ جب}\,(۲\text{ک}\,\pi + ۰)\right]^{\frac{۱}{\text{ن}}}$$

$$= \text{جم}\,\frac{۲\text{ک}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۲\text{ک}\,\pi}{\text{ن}}$$

ک کو بالترتیب ۰، ۱، ۲ .... ن - ۱ کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ قیمتیں حاصل ہونگی۔

$$(\text{جم}\,۰ + \text{خ جب}\,۰) = ۱$$

$$\left\{\text{جم}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right\}،$$

$$\left\{\text{جم}\,\frac{۴\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۴\pi}{\text{ن}}\right\} \ldots\ldots \left\{\text{جم}\,\frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right\}$$

اِن ن اصلوں سے کوئی دو ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہیں کیونکہ کسی دو قیمتوں کے لیے جو طہ کی قیمت حاصل ہوتی ہے اُن کا فرق ۲ π سے کم ہے اس لیے اُوپر کی ن قیمتیں اکائی کے ن جذروں کی ن واضح قیمتیں ہیں۔

آرگینڈ کی شکل میں اکائی کے ن جذروں کو دائرہ $|\text{ی}| = ۱$ کے اندر ایک ن ضلع والے منتظم کثیر الاضلاع کے کونوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جبکہ اس کثیر الاضلاع کا ایک راس حقیقی محور کے مثبت حصے پر ہے۔

اگر ن جفت ہو تو اس کے دو جذر حقیقی ہیں مثلاً (۱) اور (-۱)، جس کو ک = ۰، اور $\frac{۱}{۲}$ن کے بالترتیب مساوی رکھنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔ بقیہ (ن - ۲) اصلیں ملتف ہیں۔ اگر ن طاق ہو تو، اس کی صرف ایک اصل حقیقی ہے اور وہ (۱) ہے۔

اگر ہم سہ = جم $\left(\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)$ + خ جب $\left(\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)$ لکھیں تو ہم جذروں کو ۱، سہ، سہ^{۲} .... سہ$^{\text{ن}-۱}$ لکھ سکتے ہیں۔ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ اکائی کے ن جذر ایک ہندسی سلسلہ بناتے ہیں جن کی نسبت مشترک

سہ' ہے۔ اِن کا مجموعہ ہے ۔ $\frac{\text{۱} - \text{سہ}^{\text{ن}}}{\text{۱} - \text{سہ}}$ ، اور یہ = صفر کیونکہ $\text{سہ}^{\text{ن}} = \text{۱}$

[یہی نتیجہ اِس سے بھی حاصل ہوتا ہے کہ مساوات $\text{ی}^{\text{ن}} - \text{۱} = \text{صفر}$
میں $\text{ی}^{\text{ن}-\text{۱}}$ والی رقم نہیں ہے اس لیے اِس کی اصلوں کا مجموعہ صفر ہے]

اگر اکائی کی بجائے ی کوئی ملتف مقدار ہو اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہو تو $\text{ی}^{\frac{\text{۱}}{\text{ن}}}$ کی بھی ن واضح قیمتیں ہونگی ۔

کیونکہ اگر ک کوئی صحیح عدد ہو تو

$$\left(\text{جم}\,\frac{\text{طہ}+\text{۲ک}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ}+\text{۲ک}\pi}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$$

$$= \text{جم}\,(\text{طہ}+\text{۲ک}\pi) + \text{خ جب}\,(\text{طہ}+\text{۲ک}\pi)$$

$$= \text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ $\text{ر}^{\frac{\text{۱}}{\text{ن}}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{طہ}+\text{۲ک}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ}+\text{۲ک}\pi}{\text{ن}}\right)$،

ن واں جذر ہے .... (۱)

ر (جم طہ + خ جب طہ) کا یعنی ی کا

اگر ک کی بجائے سلسلہ وار اعداد صفر، ۱، ۲، ۳ .... (ن−۱)
درج کیے جائیں تو $\text{ی}^{\frac{\text{۱}}{\text{ن}}}$ کی ن واضح قیمتیں حاصل ہونگی ۔ ک کی بجائے
دوسرے صحیح اعداد ن، (ن+۱) .... درج کرنے سے کوئی نئی
قیمت حاصل نہیں ہوتی مثلاً اگر $\left(\text{جم}\,\frac{\text{طہ}+\text{۲ک}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ}+\text{۲ک}\pi}{\text{ن}}\right)$
میں ک = ن، درج کیا جائے تو حاصل ہوگا $\left(\text{جم}\,\frac{\text{طہ}+\text{۲ن}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ}+\text{۲ن}\pi}{\text{ن}}\right)$

$$= \text{جم}\left(\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}+\text{۲}\pi\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}+\text{۲}\pi\right) = \text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ن}} \;....\;(\text{ل})$$

اور اگر (ن + ۱) درج کیا جائے تو حاصل ہوگا۔

$$\text{جم}\left\{\frac{\text{ط}+2(\text{ن}+1)\pi}{\text{ن}}\right\}+\text{خ جب}\left\{\frac{\text{ط}+2(\text{ن}+1)\pi}{\text{ن}}\right\}$$

$$=\text{جم}\left\{\frac{\text{ط}+2\pi}{\text{ن}}+2\pi\right\}+\text{خ جب}\left\{\frac{\text{ط}+2\pi}{\text{ن}}+2\pi\right\}$$

$$\text{جم}\left(\frac{\text{ط}+2\pi}{\text{ن}}\right)+\text{خ جب}\left(\frac{\text{ط}+2\pi}{\text{ن}}\right)\ \ldots\ldots\ (\text{ب})$$

قیمتیں ا اور ب وہی ہیں جو مساوات (۱) میں ک کی بجائے صفر اور ۱ درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثال ۱:- (۱) کے جذر الکعب معلوم کرو۔

چونکہ جم ۰ = ۱، اور جب ۰ = ۰

اس لیے $(1)^{\frac{1}{3}}=\left[\text{جم}\,0+\text{خ جب}\,0\right]^{\frac{1}{3}}$

$$=\left[\text{جم}\ 2\text{ن}\pi+\text{خ جب}\ 2\text{ن}\pi\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=\text{جم}\frac{2\text{ن}\pi}{3}+\text{خ جب}\frac{2\text{ن}\pi}{3}$$

ن کو بالترتیب صفر، ۱، ۲ کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ قیمتیں حاصل ہوں گی۔

$$\text{جم}\,0+\text{خ جب}\,0=1$$

$$\text{جم}\frac{2\pi}{3}+\text{خ جب}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\text{خ}\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جم}\frac{4\pi}{3}+\text{خ جب}\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\text{خ}\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۲:- (-۱) کے جذر الکعب معلوم کرو۔

چونکہ جم π = -۱ اور جب π = صفر

اس لیے $(-1)^{\frac{1}{3}} = \left[\text{جم}\,\pi + \text{خ جب}\,\pi\right]^{\frac{1}{3}}$

$$= \left\{\text{جم}(2\text{ن}\pi+\pi) + \text{خ جب}(2\text{ن}\pi+\pi)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{\text{جم}\,\frac{2\text{ن}\pi+\pi}{3} + \text{خ جب}\,\frac{2\text{ن}\pi+\pi}{3}\right\}$$

$$= \text{جم}\,\frac{(2\text{ن}+1)\pi}{3} + \text{خ جب}\,\frac{(2\text{ن}+1)\pi}{3}$$

ن کو بالترتیب صفر، ۱، ۲ کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ قیمتیں حاصل ہونگی۔

$$\text{جم}\,\frac{\pi}{3} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1+\text{خ}\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جم}\,\pi + \text{خ جب}\,\pi = -1$$

$$\text{جم}\,\frac{5\pi}{3} + \text{خ جب}\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1-\text{خ}\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۳:- $(\text{خ})^{\frac{1}{5}}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

چونکہ $\text{جم}\,\frac{\pi}{2} =$ صفر اور $\text{جب}\,\frac{\pi}{2} = 1$

اس لیے $\text{خ} = \text{جم}\,\frac{\pi}{2} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{2}$

$$(\text{خ})^{\frac{1}{5}} = \left(\text{جم}\,\frac{\pi}{2} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \left\{\text{جم}\left(2\text{ن}\pi+\frac{\pi}{2}\right) + \text{خ جب}\left(2\text{ن}\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{5}}$$

$$= \text{جم}\,\frac{(2\text{ن}+\frac{1}{2})\pi}{5} + \text{خ جب}\,\frac{(2\text{ن}+\frac{1}{2})\pi}{5}$$

$$= \text{جم}\,\frac{(4\text{ن}+1)\pi}{10} + \text{خ جب}\,\frac{(4\text{ن}+1)\pi}{10}$$

$$(خ)^{\frac{1}{۵}} = جم \frac{(۴ن+۱)\pi}{۱۰} + خ\, جب \frac{(۴ن+۱)\pi}{۱۰}$$

اب، ن کو سلسلہ وار صفر، ۱، ۲، ۳ اور ۴ قیمتیں دینے سے $(خ)^{\frac{1}{۵}}$ کی مطلوبہ پانچ قیمتیں حاصل ہونگی۔

(۱) $جم \frac{\pi}{۱۰} + خ\, جب \frac{\pi}{۱۰}$

(۲) $جم \frac{۵\pi}{۱۰} + خ\, جب \frac{۵\pi}{۱۰} = خ$

(۳) $جم \frac{۹\pi}{۱۰} + خ\, جب \frac{۹\pi}{۱۰}$

(۴) $جم \frac{۱۳\pi}{۱۰} + خ\, جب \frac{۱۳\pi}{۱۰}$

(۵) $جم \frac{۱۷\pi}{۱۰} + خ\, جب \frac{۱۷\pi}{۱۰}$

مثال ۴۔ $(۱ + \sqrt{۳}\, خ)^{\frac{1}{۲}}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ $۱ = ر\, جم\, ط$

اور $\sqrt{۳} = ر\, جب\, ط$

تب $ر = +\sqrt{۱+۳} = +۲$

$$\left. \begin{array}{l} جم\, ط = \frac{۱}{۲} \\ اور\, جب\, ط = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{array} \right\} اس\, لیے\, ط = \frac{\pi}{۳}$$

اس لیے $۱ + خ\sqrt{۳} = ۲\,(جم \frac{\pi}{۳} + خ\, جب \frac{\pi}{۳})$

$$(۱ + خ\sqrt{۳})^{\frac{1}{۲}} = \left\{ ۲\,(جم \frac{\pi}{۳}) + خ\,(جب \frac{\pi}{۳}) \right\}^{\frac{1}{۲}}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{جم}\left(\frac{\pi}{3} + 2\text{ک}\pi\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\pi}{3} + 2\text{ک}\pi\right) \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{جم}\frac{\frac{\pi}{3} + 2\text{ک}\pi}{4} + \text{خ جب}\frac{\frac{\pi}{3} + 2\text{ک}\pi}{4} \right\}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{جم}\frac{(1+6\text{ک})\pi}{12} + \text{خ جب}\frac{(1+6\text{ک})\pi}{12} \right\}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{جم}\frac{(1+6\text{ک})\pi}{12} + \text{خ جب}\frac{(1+6\text{ک})\pi}{12} \right\}$$

اب ک کی بجائے سلسلہ وار ۰، ۱، ۲ اور ۳ رکھنے سے مطلوبہ قیمتیں حاصل ہوں گی ۔

$$2^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{جم}\frac{\pi}{12} + \text{خ جب}\frac{\pi}{12} \right\}$$

$$2^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{جم}\frac{7\pi}{12} + \text{خ جب}\frac{7\pi}{12} \right\}$$

$$2^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{جم}\frac{13\pi}{12} + \text{خ جب}\frac{13\pi}{12} \right\}$$

$$2^{\frac{1}{4}} \left\{ \text{جم}\frac{19\pi}{12} + \text{خ جب}\frac{19\pi}{12} \right\}$$

مثال ۵ :۔ مساوات $\text{لا}^6 + \text{لا}^4 + \text{لا}^2 + 1 = \text{صفر}$ کو حل کرو ۔

$$\text{لا}^6 + \text{لا}^4 + \text{لا}^2 + 1 = (\text{لا}^4 + 1)(\text{لا}^2 + 1) = \text{صفر}$$

پہلے جزو ضربی سے $\text{لا}^4 = -1 = \left[\text{جم}(2\text{ن}+1)\pi + \text{خ جب}(2\text{ن}+1)\pi\right]$

اس لیے $\text{لا} = (-1)^{\frac{1}{4}} = \left[\text{جم}\frac{(2\text{ن}+1)\pi}{4} + \text{خ جب}\frac{(2\text{ن}+1)\pi}{4}\right]$

ن کو قیمتیں ۰، ۱، ۲، ۳ دینے سے جو اصلیں حاصل ہوں گی وہ حسب ذیل ہیں :۔

$$\text{جم}\,\frac{\pi}{۴} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{۴}$$

$$\text{جم}\,\frac{۳\pi}{۴} + \text{خ جب}\,\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\text{جم}\,\frac{۵\pi}{۴} + \text{خ جب}\,\frac{۵\pi}{۴}$$

$$\text{جم}\,\frac{۷\pi}{۴} + \text{خ جب}\,\frac{۷\pi}{۴}$$

دوسرے جزو ضربی سے، $\text{لا}^{۳} = -۱$ یعنی $\text{لا} = (-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ جس کی قیمتیں مثال ۲ میں اوپر معلوم کی جا چکی ہیں۔ اس لیے اوپر کی مساوات کی ۷ اصلیں ہیں۔

$$(-۱)\text{، } \frac{۱ \pm \text{خ}\sqrt{۳}}{۲}\text{، } \frac{۱ \pm \text{خ}\sqrt{۲}}{۲}\text{، } \frac{-۱ \pm \text{خ}\sqrt{۲}}{۲}$$

مختلف مثلثی جملے ڈی مائرے کے مسئلہ کی مدد سے مختصر کیے جا سکتے ہیں۔

مثال ۶ - مختصر کرو۔

$$\frac{(\text{جم ۳ طہ} + \text{خ جب ۳ طہ})^{۵}\,(\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ})^{۳}}{(\text{جم ۵ طہ} + \text{خ جب ۵ طہ})^{۷}\,(\text{جم ۲ طہ} - \text{خ جب ۲ طہ})^{۵}}$$

$$(\text{جم ۳ طہ} + \text{خ جب ۳ طہ}) = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{۳} \quad (\text{جم ۵ طہ} + \text{خ جب ۵ طہ})^{۷} = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{۳۵}$$

$$(\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ}) = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{-۱} \quad (\text{جم ۲ طہ} - \text{خ جب ۲ طہ})^{۵} = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{-۱۰}$$

$$\text{اس لیے دیا ہوا جملہ} = \frac{(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{۱۵}\,(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{-۳}}{(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{۳۵}\,(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{-۱۰}}$$

$$= \frac{(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{۱۲}}{(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{۲۵}} = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{-۱۳}$$

$$= \text{جم ۱۳ طہ} - \text{خ جب ۱۳ طہ}$$

مثال ۷ :- اگر ۲ جم طہ = ا + $\frac{1}{\text{ا}}$ تو ثابت کرو کہ ۲ جم ن طہ = $\text{ا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ا}^{\text{ن}}}$

فرض کرو کہ ا = (جم طہ + خ جب طہ)

تب $\frac{1}{\text{ا}} = \frac{1}{(\text{جم طہ + خ جب طہ})}$

$= \frac{(\text{جم طہ - خ جب طہ})}{(\text{جم طہ + خ جب طہ})(\text{جم طہ - خ جب طہ})} = (\text{جم طہ - خ جب طہ})$

ا = جم طہ + خ جب طہ

$\frac{1}{\text{ا}}$ = جم طہ - خ جب طہ

اسلیے ا + $\frac{1}{\text{ا}}$ = ۲ جم طہ

اب $\text{ا}^{\text{ن}} = (\text{جم طہ + خ جب طہ})^{\text{ن}}$ = جم ن طہ + خ جب ن طہ

$\frac{1}{\text{ا}^{\text{ن}}} = (\text{جم طہ - خ جب طہ})^{\text{ن}}$ = جم ن طہ - خ جب ن طہ

اسلیے $\text{ا}^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ا}^{\text{ن}}}$ = ۲ جم ن طہ

مثال ۸ :- ی کی وہ تمام قیمتیں معلوم کرو جو مساوات $(\text{ی}+1)^5 + \text{ی}^5$ = صفر کو پورا کرتی ہیں اور دکھاؤ کہ اُنکے نقاط تعبیر (Representative points) خیالی محور کے متوازی ایک خط پر واقع ہیں۔

$(\text{ی}+1)^5 + \text{ی}^5$ = صفر

$(\text{ی}+1)^5 = -\text{ی}^5$

$-\frac{(\text{ی}+1)^5}{\text{ی}^5} = 1$

$-\left[\frac{(\text{ی}+1)}{\text{ی}}\right]^5 = 1$

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ $-\frac{(\text{ی}+1)}{\text{ی}}$ ، اکائی کا پانچواں جذر ہے۔

$\frac{-(\text{ی}+1)}{\text{ی}} = (1)^{\frac{1}{5}} = \left[\text{جم ۲ ک}\pi + \text{خ جب ۲ ک}\pi\right]^{\frac{1}{5}}$

$$= \text{جم}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5} + \text{خ جب}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5}$$

$$-\frac{\text{ی}+1}{\text{ی}} = \text{جم}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5} + \text{خ جب}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5}$$

$$-1-\frac{1}{\text{ی}} = \text{جم}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5} + \text{خ جب}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5}$$

$$-\frac{1}{\text{ی}} = 1 + \text{جم}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5} + \text{خ جب}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5}$$

اس لیے $\text{ی} = \dfrac{-1}{1+\text{جم}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5} + \text{خ جب}\,\frac{2\text{ک}\,\pi}{5}}$

$= \dfrac{-1}{1+\text{جم ک ط} + \text{خ جب ک ط}}$ جہاں $\text{ط} = \frac{2\pi}{5}$ اور ک قیمتیں ۱، ۲، ۳، ۴ اختیار کرتا ہے۔

$$\text{ی} = \frac{-1}{(1+\text{جم ک ط} + \text{خ جب ک ط})}$$

$$= \frac{-1}{\left(2\,\text{جم}^2\frac{\text{ک ط}}{2} + 2\,\text{خ جب}\frac{\text{ک ط}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{ک ط}}{2}\right)}$$

$$= \frac{-1}{2\,\text{جم}\frac{\text{ک ط}}{2}\left[\text{جم}\frac{\text{ک ط}}{2} + \text{خ جب}\frac{\text{ک ط}}{2}\right]}$$

$$= \frac{-\left(\text{جم}\frac{\text{ک ط}}{2} - \text{خ جب}\frac{\text{ک ط}}{2}\right)}{2\,\text{جم}\frac{\text{ک ط}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{خ مس}\,\frac{\text{ک ط}}{2}$$

تمام اصلوں کے حقیقی حصے $(-\frac{۱}{۲})$ کے مساوی ہیں اور یہ نقاط خط $\text{لا} = -\frac{۱}{۲}$ پر واقع ہیں، جو خیالی محور کے متوازی ایک خط ہے۔

امثلہ نمبری (۲)

(۱) $(-۱)^{\frac{۱}{۶}}$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(۲) $(۱+\text{خ})^{\frac{۱}{۶}}$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(۳) $۱۶^{\frac{۱}{۴}}$ کی قیمتیں معلوم کرو۔

(۴) $\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{۳} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{۳}\right)^{\frac{۳}{۴}}$ کی چار قیمتوں کا مسلسل حاصل ضرب معلوم کرو۔

(۵) مساوات $\text{لا}^{۱۲} - ۱ = \text{صفر}$ کو حل کرو اور بتاؤ کہ اس کی کونسی اصلیں مساوات $\text{لا}^{۴} + \text{لا}^{۲} + ۱ = \text{صفر}$ کو پورا کرتی ہے۔

(۶) مساوات $\text{لا}^{۷} + ۱ = \text{صفر}$ کو حل کرو۔

(۷) $\left(\text{جم}\,\frac{۲\pi}{۳} + \text{خ جب}\,\frac{۲\pi}{۳}\right)^{\frac{۱}{۴}}$ کو مختصر کرو اور جواب ایسی شکل میں حاصل کرو جس میں مثلثی جملے شامل نہ ہوں۔

مختصر کرو۔

(۸)
$$\frac{(\text{جم}\,۲\,\text{طہ} - \text{خ جب}\,۲\,\text{طہ})^{۷}\,(\text{جم}\,۳\,\text{طہ} + \text{خ جب}\,۳\,\text{طہ})^{-۱۵}}{(\text{جم}\,۴\,\text{طہ} + \text{خ جب}\,۴\,\text{طہ})^{۱۲}\,(\text{جم}\,۵\,\text{طہ} - \text{خ جب}\,۵\,\text{طہ})^{-۶}}$$

(۹)
$$\frac{\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{۶} - \text{خ جب}\,\frac{\pi}{۶}\right)^{\frac{۱۱}{۲}}}{\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{۶} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{۶}\right)^{-\frac{۱}{۲}}}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ $(\text{جب لا} + \text{خ جم لا})^{\text{ن}}$

$$= \text{جم ن}\left(\frac{\pi}{۲} - \text{لا}\right) + \text{خ جب ن}\left(\frac{\pi}{۲} - \text{لا}\right)$$

(۱۱) اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) $ی^{۲ن} - ا^{۲ن} = (ی^۲ - ا^۲)\,(ی^۲ - ۲\,ا\,ی\,جم\,\frac{\pi}{ن} + ا^۲)\,\ldots\ldots$

$\ldots\ldots \left\{ی^۲ - ۲\,ا\,ی\,جم\,\frac{(ن-۱)\,\pi}{ن} + ا^۲\right\}$

(۲) $ی^{۲ن} - ۲\,ا^ن\,ی^ن\,جم\,ط + ا^{۲ن}$

$= (ی^۲ - ۲\,ا\,ی\,جم\,\frac{ط}{ن} + ا^۲)\,(ی^۲ - ۲\,ا\,ی\,جم\,\frac{ط + ۲\pi}{ن} + ا^۲)$

$\ldots\ldots \left\{ی^۲ - ۲\,ا\,ی\,جم\,\frac{ط + ۲(ن-۱)\,\pi}{ن} + ا^۲\right\}$

(۱۲) ثابت کرو کہ کسی حقیقی مقدار کے ن خیالی جذروں کو مزدوج جوڑوں میں ترتیب دیا جا سکتا ہے۔

(۱۳) شکل میں مساوات $ی^۵ + ۱$ = صفر کی اصلیں بتاؤ۔

(۱۴) ثابت کرو کہ مساوات

$(۱ + لا)^۶ + لا^۶$ = صفر کی ہر ایک اصل کا حقیقی حصہ $-\frac{۱}{۲}$ ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ مساوات $۳۲\,ی^۵ = (ی + ۱)^۵$ کی چار مختلف اصلیں ہیں۔ جن میں سے دو، دوسرے ربع میں ہیں اور دو تیسرے ربع میں واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ تمام اصلیں ایک دائرے پر واقع ہیں۔

باب سوّم

لامتناہی سلسلے۔ قوت نمائی، لوکارتمی، دائری اور زائدی تفاعل

۱۰۔ ملتف ارقام کے سلسلے کا مطلق استدقاق۔

یہ فرض کرکے کہ طالب علم حقیقی سلسلوں کے ابتدائی نظریوں سے واقف ہے اب ہم بعض ملتف ارقام کے سلسلوں پر بحث کرینگے۔ لامتناہی سلسلہ

$ی_1 + ی_2 + ی_3 + \cdots\cdots + ی_ن + \cdots\cdots$ پر غور کرو جہاں

$ی_1، ی_2 \cdots\cdots$ وغیرہ ملتف مقداریں ہیں اور $ی_ن = (لا_ن + خ\, ما_ن)$

سلسلہ $ی_1 + ی_2 + ی_3 + \cdots\cdots + ی_ن + \cdots\cdots$

کو مستدق کہتے ہیں اگر حقیقی رقموں کے سلسلے

$لا_1 + لا_2 + لا_3 + \cdots\cdots + لا_ن + \cdots\cdots$

اور $ما_1 + ما_2 + ما_3 + \cdots\cdots + ما_ن + \cdots\cdots$ مستدق ہوں

فرض کرو کہ ان سلسلوں کی پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو ہم بالترتیب

$س_ن$، $لا_ن$ اور $ما_ن$ سے تعبیر کرتے ہیں۔

تب $س_ن = لا_ن + خ\, ما_ن$

اگر اوپر کے دو حقیقی سلسلے بالترتیب مجموعوں لا اور ما کی طرف مستدق ہوں جبکہ ن مائل بہ لامتناہی ہو تو ہے ن انتہا (لا + خ ما) کی طرف مستدق ہوگا اور اس کو لامتناہی تک ملتف سلسلہ کا مجموعہ کہتے ہیں۔

حقیقی مثبت رقموں والے لامتناہی سلسلہ

$|ی_1| + |ی_2| + |ی_3| + \cdots + |ی_ن| + \cdots$ کو

مقیاسوں کا سلسلہ کہتے ہیں۔

اب ہم یہ بتائیں گے کہ اگر مقیاسوں کا سلسلہ مستدق ہو تو ابتدائی ملتف سلسلہ بھی مستدق ہوگا۔

لا_ن اور ما_ن حقیقی ہیں اور $|لا_ن| \leqq (لا_ن^2 + ما_ن^2)^{\frac{1}{2}}$

اور $|ما_ن| \leqq (لا_ن^2 + ما_ن^2)^{\frac{1}{2}}$

اس لیے اگر سلسلہ $\sum_{ن=1}^{\infty} |ی_ن|$، مستدق ہو تو دونوں سلسلے

$\sum_{ن=1}^{\infty} |لا_ن|$ اور $\sum_{ن=1}^{\infty} |ما_ن|$ بھی مستدق ہونگے کیونکہ آخری دو سلسلوں کی کوئی رقمیں، مقیاسوں کے سلسلے کی تناظر رقم سے بڑی نہیں ہیں۔

اس لیے حقیقی سلسلے $\sum_{ن=1}^{\infty}$ لا_ن اور $\sum_{ن=1}^{\infty}$ ما_ن دونوں مطلق مستدق ہیں

اور سلسلہ $\sum_{ن=1}^{\infty}$ ی_ن، کا لامتناہی تک مجموعہ محدود ہے۔

جب مقیاسوں کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے تو ابتدائی ملتف رقموں والے سلسلے کو **مطلقاً مستدق سلسلہ** کہتے ہیں۔

مثال ۱: سلسلہ $ی - \frac{ی^2}{2} + \frac{ی^3}{3} - \frac{ی^4}{4} + \cdots (-1)^{ن-1} \frac{ی^ن}{ن} + \cdots$

پر غور کرو - اِس کے مقیاسوں کا سلسلہ ہے -

$$ر + \frac{ر^2}{2} + \frac{ر^3}{3} + \frac{ر^4}{4} + \cdots\cdots + (\frac{ر^ن}{ن}) + \cdots\cdots$$

جہاں $ر = |ی|$

مقیاسوں کے سلسلے کے اشتقاق کی جانچ کے لیے (D' Lembert) کی نسبتی جانچ استعمال کرو -

تب $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}} = (\frac{ن-1}{ن}) ر = (1 - \frac{1}{ن}) ر$

اور $\lim_{ن \to \infty} (1 - \frac{1}{ن}) ر \longrightarrow ر$

اِس لیے اوپر کا سلسلہ مستدق ہے اگر $ر < 1$، اور اِس لیے ابتدائی سلسلہ مطلق مستدق ہے اگر $|ی| < 1$ -

۱۱- قوت نمائی سلسلہ

سلسلہ $1 + \frac{ی}{\underline{|1}} + \frac{ی^2}{\underline{|2}} + \frac{ی^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots + \frac{ی^ن}{\underline{|ن}} + \cdots\cdots$

پر غور کرو - جہاں $ی = ر$ (جم طہ + خ جب طہ)

مقیاسوں کا سلسلہ ہے $1 + \frac{ر}{\underline{|1}} + \frac{ر^2}{\underline{|2}} + \frac{ر^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots + \frac{ر^ن}{\underline{|ن}} + \cdots\cdots$

اور یہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے کیونکہ $\frac{ع_ن}{ع_{ن-1}} = \frac{ر}{ن}$ اور جو مائل بہ صفر ہے جبکہ ن مائل بہ لامتناہی ہو -

اِس لیے ابتدائی سلسلہ ی کی تمام محدود قیمتوں کے لیے مستدق ہے - اب یہ معلوم ہے کہ اوپر کا سلسلہ، $و^ی$ کا پھیلاؤ ہے اگر ی حقیقی ہو جہاں و، نیپری لوکارتم کی اساس ہے اور جس کی تعریف مساوات

$$\text{و} = ۱ + \frac{۱}{|\underline{۱}} + \frac{۱}{|\underline{۲}} + \frac{۱}{|\underline{۳}} + \cdots + \frac{۱}{|\underline{ن}} + \cdots +$$

سے کی جاتی ہے۔

ہم $\text{و}^{\text{ی}}$ کی تعریف، جبکہ ی ملتف مقدار ہو، لامتناہی سلسلہ

$$\text{و}^{\text{ی}} = ۱ + \frac{\text{ی}}{|\underline{۱}} + \frac{\text{ی}^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{\text{ی}^{۳}}{|\underline{۳}} + \cdots + \cdots = \sum_{\text{ن}=۰}^{\infty} \frac{\text{ی}^{\text{ن}}}{|\underline{\text{ن}}} \quad \text{سے}$$

کرتے ہیں۔

اب $\text{و}^{\text{ی}'}$ کے لیے اسی طرح کا سلسلہ $۱ + \frac{\text{ی}'}{|\underline{۱}} + \frac{\text{ی}'^{۲}}{|\underline{۲}} + \cdots\cdots$

لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{و}^{\text{ی}} \times \text{و}^{\text{ی}'} = \sum_{\text{ن}=۰}^{\infty} \left[\frac{(\text{ی} + \text{ی}')^{\text{ن}}}{|\underline{\text{ن}}}\right]$$

تعریف سے ظاہر ہے کہ $\sum_{\text{ن}=۰}^{\infty} \frac{(\text{ی} + \text{ی}')^{\text{ن}}}{|\underline{\text{ن}}} = \text{و}^{\text{ی}+\text{ی}'}$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ملتف مقداروں کے لیے بھی قوت نماؤں کا اصول برقرار رہتا ہے۔

عام طور پر $\text{و}^{\text{لا}+\text{خ}\,\text{ا}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{خ}\,\text{ا}}$

۱۲۔ دائری تفاعلوں کی قوت نمائی قیمتیں۔

فرض کرو کہ ی = خ طہ، جہاں طہ حقیقی ہے۔ تب

$$\text{و}^{\text{خ طہ}} = \sum_{\text{ن}=۰}^{\infty} \frac{(\text{خ}^{\text{ن}}\ \text{طہ}^{\text{ن}})}{|\underline{\text{ن}}}$$

$$= \left(۱ - \frac{\text{طہ}^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{\text{طہ}^{۴}}{|\underline{۴}} - \frac{\text{طہ}^{۶}}{|\underline{۶}} + \cdots\cdots\right)$$

+ خ (طہ - طہ³/⌊۳ + طہ⁵/⌊۵ - طہ⁷/⌊۷ + ...)

اب اِس سلسلے کے حقیقی اور خیالی حصّے جب طہ اور جم طہ کے میکلارین کے مسئلے سے حاصل شدہ مشہور سلسلے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے۔

و^(خ طہ) = جم طہ + خ جب طہ .... (۱)

اگر (طہ) کی علامت بدل دی جائے تو

و^(-خ طہ) = جم طہ - خ جب طہ .... (۲)

اور اِن دو نتائج کو جمع اور تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

جم طہ = (و^(خ طہ) + و^(-خ طہ))/۲ اور جب طہ = (و^(خ طہ) - و^(-خ طہ))/(۲ خ)

اختصار کی خاطر یہ عام طور پر سہولت دہ ہوتا ہے کہ ہم (جم طہ + خ جب طہ) کی بجائے ہم و^(خ طہ) لکھیں۔ قوت نماؤں کی شکل میں بیان کرنے سے ڈی مائرے کا مسئلہ ہو جاتا ہے۔

(و^(خ طہ))^ن = و^(خ ن طہ)

مثال ۲: ثابت کرو کہ ۲ جم طہ = [(۱ + خ ت)/(۱ - خ ت)] + [(۱ - خ ت)/(۱ + خ ت)]

جہاں ت = مس طہ/۲

اب چونکہ [(۱ + خ ت)/(۱ - خ ت)] = (جم طہ/۲ + خ جب طہ/۲)/(جم طہ/۲ - خ جب طہ/۲)

= و^(خ طہ/۲) / و^(-خ طہ/۲) = و^(خ طہ/۲ + خ طہ/۲) = و^(خ طہ)

اسی طرح سے [(۱ - خ ت)/(۱ + خ ت)] = و^(-خ طہ)

اس لیے $$\frac{\text{۱+خ ت}}{\text{۱−خ ت}} + \frac{\text{۱−خ ت}}{\text{۱+خ ت}} = \text{و}^{\text{خ طہ}} + \text{و}^{-\text{خ طہ}} = \text{۲ جم طہ}$$

مثال ۳ :- ثابت کرو کہ

$$\text{۳۲ جم}^{\text{۴}}\text{ طہ جب}^{\text{۲}}\text{ طہ} = \text{۲} + \text{جم ۲طہ} - \text{۲ جم ۴طہ} - \text{جم ۶طہ}$$

فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{و}^{\text{خ طہ}}$

تب $\frac{\text{۱}}{\text{ی}} = \text{و}^{-\text{خ طہ}}$

اس لیے $\text{ی} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}} = \text{۲ جم طہ}$

اور $\text{ی} - \frac{\text{۱}}{\text{ی}} = \text{۲ خ جب طہ}$

اس لیے $$\text{۳۲ جم}^{\text{۴}}\text{ طہ جب}^{\text{۲}}\text{ طہ} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[\text{۱۶ جم}^{\text{۴}}\text{ طہ}\right]\left[\text{۴ جب}^{\text{۲}}\text{ طہ}\right]$$

$$\text{۳۲ جم}^{\text{۴}}\text{ طہ جب}^{\text{۲}}\text{ طہ} = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[\text{ی} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}}\right]^{\text{۴}}\left[\text{ی} - \frac{\text{۱}}{\text{ی}}\right]^{\text{۲}}$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[\text{ی}^{\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۲}}}\right]^{\text{۲}}\left[\text{ی} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}}\right]^{\text{۲}}$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[\text{ی}^{\text{۴}} - \text{۲} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۴}}}\right]\left[\text{ی}^{\text{۲}} + \text{۲} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۲}}}\right]$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[\text{ی}^{\text{۶}} + \text{ی}^{-\text{۶}} + \text{۲ی}^{\text{۴}} + \text{۲ی}^{-\text{۴}} - \text{ی}^{\text{۲}} - \text{ی}^{-\text{۲}} - \text{۴}\right]$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left\{\left(\text{ی}^{\text{۶}} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۶}}}\right) + \text{۲}\left(\text{ی}^{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۴}}}\right) - \left(\text{ی}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۲}}}\right) - \text{۴}\right\}$$

اب $\text{ی} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}} = \text{۲ جم طہ}$

اور $\text{ی} - \frac{\text{۱}}{\text{ی}} = \text{۲ خ جب طہ}$

اس لیے
$$\left\{\begin{array}{l}\text{ی}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۲}}} = \text{۲ جم ۲طہ} \\ \text{ی}^{\text{۴}} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۴}}} = \text{۲ جم ۴طہ}\end{array}\right.$$
اور $\text{ی}^{\text{۶}} + \frac{\text{۱}}{\text{ی}^{\text{۶}}} = \text{۲ جم ۶طہ}$

اس لیے اوپر کا جملہ

= - جم ٦ طہ - ٢ جم ٤ طہ + جم ٢ طہ + ٢

۱۳ - ملتف عدد کے لوکارتم ـــــ اگر ی کوئی ملتف عدد ہو

اور ھ مساوات ی = وھ کو پورا کرے تو ھ کو ی کا اساس و پر لوکارتم کہتے

ہیں - جیسا کہ اب بتایا جائیگا کہ اگر ی دیا ہوا ہو تو ھ کی بے شمار قیمتیں

ہوتی ہیں اور اس لیے ملتف عدد کے بے شمار لوکارتم ہوتے ہیں -

فرض کرو کہ ی = ر (جم طہ + خ جب طہ) جہاں ر ی کا مقیاس

اور طہ ی کی دلیل کی صدر قیمت ہے -

تب اگر ھ = ع + خ و، تو

ر (جم طہ + خ جب طہ) = وع+خ و

= وع × وخ و

= وع [جم و + خ جب و]

جہاں وع = ر اور و = طہ + ٢ ن π

جہاں ن = ٠، ±١، ±٢، ±٣، .... وغیرہ

چونکہ ع حقیقی ہے اس لیے یہ مثبت عدد ر کا نیپرین لوکارتم ہے

جس کو ہم لوکو ر سے تعبیر کرینگے اور یہ یگانہ ہے - لیکن و کی بے شمار قیمتیں

ہوسکتی ہیں جن میں کسی دو کا باہمی فرق ٢ π کا کوئی ضعف ہے - ی کے

لوکارتم تب ہم کو مساوات

لوک ی = لوکو ر + خ (طہ + ٢ ن π) سے ملتے ہیں جہاں

ن صفر یا کوئی صحیح عدد ہے - ن = صفر رکھنے سے جو قیمت حاصل ہوتی ہے

اس کو ی کا صدر لوکارتم کہتے ہیں - اِس کا خیالی حصہ ی کے دلیل کی

صدر قیمت ہے۔

مثال (۴) لوک (۱ + خ) کی عام قیمت معلوم کرو۔

$$\text{لوک}\,(۱ + \text{خ}) = \text{لوک}_{\text{و}} \sqrt{۱ + ۱} + \text{خ}\left[۲\text{ن}\,\pi + \text{مس}^{-۱}\,\frac{۱}{۱}\right]$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,۲ + \text{خ}\,\pi\left(۲\text{ن} + \frac{۱}{۴}\right)$$

۱۴ - تفاعل $\text{ا}^{\text{ی}}$

اگر ا اور ی ملتف عدد ہوں تو ہم $\text{ا}^{\text{ی}}$ کی تعریف مساوات $\text{ا}^{\text{ی}} = \text{و}^{\text{ی لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}}$ سے کرتے ہیں۔

چونکہ لوکارتم کی بے شمار قیمتیں ہوتی ہیں اس لیے اس تفاعل کی بھی لا انتہا قیمتیں ہوتی ہیں۔

اگر $|\text{ا}| = \text{ر}$ اور ا کے دلیل کی صدر قیمت ب ہو اور ی = (لا + خ ما) ہو تو

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا} = \text{لوک ر} + \text{خ}\,(\text{ب} + ۲\text{ن}\,\pi)$$

اور تعریف سے

$$\text{ا}^{\text{ی}} = \text{و}^{\{(\text{لا} + \text{خ ما})[\text{لوک ر} + \text{خ}\,(\text{ب} + ۲\text{ن}\,\pi)]\}}$$

$$= \text{و}^{\{\text{لا لوک ر} - \text{ما}\,(\text{ب} + ۲\text{ن}\,\pi) + \text{خ}\,[\text{ما لوک ر} + \text{لا}\,(\text{ب} + ۲\text{ن}\,\pi)]\}}$$

جہاں ن کی کوئی قیمتیں ۰، ±۱، ±۲، ±۳، .... ہو سکتی ہیں۔

مثال (۵) $\text{خ}^{\text{خ}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{خ}^{\text{خ}} = \text{و}^{\text{خ لوک خ}} = \text{و}^{\text{خ}\left[\text{لوک}\,\sqrt{۱} + \text{خ}\,(۲\text{ن}\,\pi + \text{مس}^{-۱}\,\frac{۱}{۰})\right]}$$

$$= \text{و}^{\text{خ}\left[\text{خ}\,(۲\text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{۲})\right]}$$

$$= \text{و}^{-(۲\text{ن} + \frac{۱}{۲})\,\pi}$$

جہاں ن = صفر، ±۱، ±۲، ±۳، ....

اِس لیے اس تفاعل کی بے شمار قیمتیں ہیں جن میں سے ہر ایک حقیقی ہے

دائری اور زائدی تفاعل — ملتف عددی ی کے دائری تفاعلوں کی تعریف ذیل کے رشتوں کی مدد سے کی جاتی ہے -

$$\text{جب ی} = \frac{\text{و}^{\text{خ ی}} - \text{و}^{-\text{خ ی}}}{\text{۲ خ}}$$

$$\text{جم ی} = \frac{\text{و}^{\text{خ ی}} + \text{و}^{-\text{خ ی}}}{۲}$$

$$\text{مس ی} = \frac{\text{جب ی}}{\text{جم ی}} = \frac{۱}{\text{مم ی}}$$

$$\text{قم ی} = \frac{۱}{\text{جب ی}}$$

$$\text{قط ی} = \frac{۱}{\text{جم ی}}$$

$$\text{جہاں } \text{و}^{\text{خ ی}} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \frac{(\text{خ ی})^{\text{ن}}}{\text{ن!}}$$

اُن مساواتوں سے جو جم ی اور جب ی کی تعریف کرتے ہیں۔

$$\text{جم ی} + \text{خ جب ی} = \text{و}^{\text{خ ی}}$$

$$\text{جم ی} - \text{خ جب ی} = \text{و}^{-\text{خ ی}}$$

$$\text{اس لیے } (\text{جم ی} + \text{خ جب ی})(\text{جم ی} - \text{خ جب ی}) = \text{و}^{\text{خ ی}} \times \text{و}^{-\text{خ ی}} = \text{و}$$

$$\text{یعنے } \text{جم}^{۲}\text{ ی} + \text{جب}^{۲}\text{ ی} = ۱$$

حقیقی اعداد کی طرح اگر ۶ اور و کوئی دو ملتف مقداریں ہوں تو

یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\text{جب}\,(\text{۶} \pm \text{و}) = \text{جب ۶ جم و} \pm \text{جم ۶ جب و}$$

$$\text{جم}\,(\text{۶} \pm \text{و}) = \text{جم ۶ جم و} \mp \text{جب ۶ جب و}$$

اسی طرح سے ہم زائدی تفاعلوں کی تعریف رشتوں

$$\text{جبزی} = \frac{\text{و}^{\text{ی}} - \text{و}^{-\text{ی}}}{۲}$$

$$\text{جمزی} = \frac{\text{و}^{\text{ی}} + \text{و}^{-\text{ی}}}{۲}$$

$$\text{مسزی} = \frac{\text{جبزی}}{\text{جمزی}} = \frac{۱}{\text{تمزی}}$$

$$\text{تمزی} = \frac{۱}{\text{جبزی}}$$

$$\text{قطزی} = \frac{۱}{\text{جمزی}}$$ سے کرتے ہیں۔

ان تعریفوں سے ظاہر ہے کہ $\text{جمزی}^{۲} - \text{جبزی}^{۲} = ۱$

دائری تفاعلوں کی طرح زائدی تفاعلوں کے لیے بھی جمع کے ضابطے حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

$$\text{جمز}\,(\text{۶} \pm \text{و}) = \text{جمز ۶ جمز و} \pm \text{جبز ۶ جبز و}$$

$$\text{جبز}\,(\text{۶} \pm \text{و}) = \text{جبز ۶ جمز و} \pm \text{جبز و جمز ۶}$$

$$\text{مسز}\,(\text{۶} \pm \text{و}) = \frac{\text{مسز ۶} \pm \text{مسز و}}{۱ \pm \text{مسز ۶ مسز و}}$$

ہر ایک صورت میں دونوں طرف اوپر کی علامتیں یا نیچے کی علامتیں لی جائیں۔

اگر ی خالص خیالی ہو اور (خ ما) کے مساوی ہو جہاں ما حقیقی ہے تو

تعریف سے ظاہر ہے کہ

جب خ ما = (و^{−ما} − و^{ما}) / ۲خ = خ جبز ما

جم خ ما = (و^{−ما} + و^{ما}) / ۲ = جمز ما

جبز خ ما = (و^{خ ما} − و^{−خ ما}) / ۲ = خ جب ما

جمز خ ما = (و^{خ ما} + و^{−خ ما}) / ۲ = جم ما

اب ہم کسی ملتف مقدار ی = (لا + خ ما) کی جیب، جیب التمام، مماس، وغیرہ کو شکل (ا + خ ب) میں بیان کرسکتے ہیں۔

مثال (۶) جب (لا + خ ما) کو شکل (ا + خ ب) میں تحویل کرو۔

جب (لا + خ ما) = جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما

= جب لا جمز ما + خ جم لا جبز ما

جم (لا + خ ما) = جم لا جم خ ما − جب لا جب خ ما

= جم لا جمز ما − خ جب لا جبز ما

مس (لا + خ ما) = جب (لا + خ ما) / جم (لا + خ ما) = ۲ جب (لا + خ ما) جم (لا − خ ما) / ۲ جم (لا + خ ما) جم (لا − خ ما)

= (جب ۲ لا + جب ۲ خ ما) / (جم ۲ لا + جم ۲ خ ما)

= (جب ۲ لا + خ جبز ۲ ما) / (جم ۲ لا + جمز ۲ ما)

یہ دیکھ لیا جائے کہ تمام دائری اور زائدی تفاعلوں کو ہم نے ی کے قوتی سلسلے کے طور پر بیان کیا ہے جہاں قوتی سلسلوں کے سر حقیقی ہیں۔ اِس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ف اس میں سے کوئی ایک تفاعل ہو اور

ف (لا + خ ما) = (عہ + خ بہ) - جہاں عہ اور بہ حقیقی ہیں، تو

ف (لا − خ ما) = (عہ − خ بہ)

جس سے |ف (لا + خ ما)|^{2} = عہ^{2} + بہ^{2} = ف (لا + خ ما) × ف (لا − خ ما)

اِس اصول سے اِس قسم کے تفاعلوں کے مقیاس آسانی سے معلوم ہوتے ہیں۔

مثال (۷) |جب (لا + خ ما)|^{2} = جب (لا + خ ما) × جب (لا − خ ما)

= $\frac{1}{2}$ (جم ۲ خ ما − جم ۲ لا)

= $\frac{1}{2}$ (جمز ۲ ما − جم ۲ لا)

= جمز^{2} ما − جم^{2} لا

اِسی طرح سے |جم (لا + خ ما)|^{2} = جم (لا + خ ما) × جم (لا − خ ما)

= $\frac{1}{2}$ (جم ۲ لا + جم ۲ خ ما)

= $\frac{1}{2}$ (جم ۲ لا + جمز ۲ ما)

= جم^{2} لا + جمز^{2} ما

اور |مس (لا + خ ما)|^{2} = (جمز ۲ ما − جم ۲ لا) / (جم ۲ لا + جمز ۲ ما)

اِس کے متناظر زائدی تفاعلوں کے لیے مماثل نتیجے طالب علم مشق کے طور پر خود کرے۔

مثال ۸ مس$^{-1}$ [عہ + خ بہ] کے حقیقی اور خیالی حصے الگ الگ کرو

فرض کرو کہ مس$^{-1}$ [عہ + خ بہ] = (لا + خ ما)

یعنی مس (لا + خ ما) = عہ + خ بہ

تب مس (لا − خ ما) = عہ − خ بہ

∴ مس ۲ لا = مس {(لا + خ ما) + (لا − خ ما)}

= [(عہ + خ بہ) + (عہ − خ بہ)] / [۱ − (عہ + خ بہ) (عہ − خ بہ)] = ۲ عہ / (۱ − عہ^{2} − بہ^{2})

∴ لا = $\frac{1}{2}$ مس$^{-1}$ [۲ عہ / (۱ − عہ^{2} − بہ^{2})]

$$\text{نیز مس}(\text{۲ خ ما}) = \text{مس}\left\{(\text{لا} + \text{خ ما}) - (\text{لا} - \text{خ ما})\right\}$$

$$= \frac{(\text{عہ} + \text{خ بہ}) - (\text{عہ} - \text{خ بہ})}{\text{۱} + (\text{عہ} + \text{خ بہ})(\text{عہ} - \text{خ بہ})} = \frac{\text{۲ خ بہ}}{\text{۱} + \text{عہ}^{\text{۲}} + \text{بہ}^{\text{۲}}}$$

$$\therefore \text{خ}\,\frac{\text{و}^{\text{۲ما}} - \text{و}^{-\text{۲ما}}}{\text{و}^{\text{۲ما}} + \text{و}^{-\text{۲ما}}} = \frac{\text{۲ خ بہ}}{\text{۱} + \text{عہ}^{\text{۲}} + \text{بہ}^{\text{۲}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ا})$$

$$\therefore \frac{\text{و}^{\text{۲ما}}}{\text{و}^{-\text{۲ما}}} = \frac{\text{۱} + \text{عہ}^{\text{۲}} + \text{بہ}^{\text{۲}} + \text{۲ بہ}}{\text{۱} + \text{عہ}^{\text{۲}} + \text{بہ}^{\text{۲}} - \text{۲ بہ}}$$

$$\therefore \text{و}^{\text{۴ما}} = \frac{(\text{۱} + \text{بہ})^{\text{۲}} + \text{عہ}^{\text{۲}}}{(\text{۱} - \text{بہ})^{\text{۲}} + \text{عہ}^{\text{۲}}}$$

$$\therefore \text{ما} = \tfrac{\text{۱}}{\text{۴}}\,\text{لوک}\left\{\frac{(\text{۱} + \text{بہ})^{\text{۲}} + \text{عہ}^{\text{۲}}}{(\text{۱} - \text{بہ})^{\text{۲}} + \text{عہ}^{\text{۲}}}\right\}$$

$$\text{نیز مساوات (ا) سے مسز ۲ ما} = \frac{\text{۲ بہ}}{\text{۱} + \text{عہ}^{\text{۲}} + \text{بہ}^{\text{۲}}}$$

$$\text{اس لیے ما} = \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{مسز}^{-\text{۱}}\frac{\text{۲ بہ}}{\text{۱} + \text{عہ}^{\text{۲}} + \text{بہ}^{\text{۲}}}$$

$$\text{پس مس}^{-\text{۱}}(\text{عہ} + \text{خ بہ}) = \text{ن}\,\pi + \text{مس}^{-\text{۱}}(\text{عہ} + \text{خ بہ})$$

$$= \text{ن}\,\pi + \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{مس}^{-\text{۱}}\frac{\text{۲ عہ}}{\text{۱} - \text{عہ}^{\text{۲}} - \text{بہ}^{\text{۲}}} + \frac{\text{خ}}{\text{۲}}\,\text{مسز}^{-\text{۱}}\frac{\text{۲ بہ}}{\text{۱} + \text{عہ}^{\text{۲}} + \text{بہ}^{\text{۲}}}$$

مثال (۹) لوک جب (لا + خ ما) کے حقیقی اور خیالی حصے الگ کرو۔

$$\text{لوک جب}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{لوک}(\text{جب لا جز ما} + \text{خ جم لا جز ما})$$

= لوک √(جب^{2} لا جمز^{2} ما + جم^{2} لا جبز^{2} ما) خ (۲ ن π + مس$^{-1}$ (جم لا جبز ما / جب لا جمز ما))

= ½ لوک [(۱ − جم^{2} لا) جمز^{2} ما + جم^{2} لا (جمز^{2} ما − ۱)] + خ [۲ ن π + مس$^{-1}$ (جم لا مسز ما)]

= ½ لوک [جمز^{2} ما − جم^{2} لا] + خ [۲ ن π + مس$^{-1}$ (جم لا مسز ما)]

= ½ لوک [(جمز ۲ ما + ۱)/۲ − (جم ۲ لا + ۱)/۲] + خ [۲ ن π + مس$^{-1}$ (جم لا مسز ما)]

= ½ لوک [(جمز ۲ ما − جم ۲ لا)/۲] + خ [۲ ن π + مس$^{-1}$ (مم لا مسز ما)]

مثال (۱۰) اگر جب (و + خ ب) = (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

لا^{2}/جمز^{2} ب + ما^{2}/جبز^{2} ب = ۱ اور لا^{2}/جب^{2} ا − ما^{2}/جم^{2} ا = ۱

جب (ا + خ ب) = جب ا جمز ب + خ جم ا جبز ب = لا + خ ما

حقیقی اور خیالی حصّوں کو مساوی رکھنے سے

جب ا جمز ب = لا

جم ا جبز ب = ما

جب ا = لا / جمز ب .... (۱)

جم ا = ما / جبز ب .... (۲)

(۱) اور (۲) کو مربع لے کر جمع کرنے سے لا^{2}/جمز^{2} ب + ما^{2}/جبز^{2} ب = ۱

نیز جمز ب = لا / جب ا .... (۳)

اور جمز ب = ما / جم ا .... (۴)

(۳) اور (۴) کو مربع لے کر تفریق کرنے سے لا^{۲} / جب^{۲} ا − ما^{۲} / جم^{۲} ا = ۱

مثال (۱۱) اگر جم (ا + خ ب) جمز (لا + خ ما) = ۱، جہاں ا، ب، لا، ما حقیقی ہیں تو ثابت کرو کہ

مس ا مسز ب = مسز لا مس ما

جم (ا + خ ب) جمز (لا + خ ما) = (جم ا جمز ب − خ جب ا جبز ب) (جمز لا جم ما + خ جبز لا جب ما) = ۱

(جم ا جمز ب − خ جب ا جبز ب) (جمز لا جم ما + خ جبز لا جب ما) = ۱

اس کا خیالی حصہ صفر کے مساوی ہے۔ اور حقیقی حصہ ۱ کے مساوی ہے۔

اس لیے جم ا جمز ب جمز لا جم ما + جب ا جبز ب جبز لا جب ما = ۱ ..... (۱)

اور جم ا جمز ب جبز لا جب ما − جب ا جبز ب جمز لا جم ما = صفر ..... (۲)

(۲) سے جم ا جمز ب جبز لا جب ما = جب ا جبز ب جمز لا جم ما

جبز لا جب ما / جمز لا جم ما = جب ا جبز ب / جم ا جمز ب

مسز لا مس ما = مس ا مسز ب

مثال (۱۲) ثابت کرو کہ جب$^{-۱}$ (۴) کی عام قیمت (۲م + ½) π ± خ لوک (۴ + √۱۵) ہے جہاں م ایک صحیح عدد یا صفر ہے۔

اگر جب ی = ۴، تو جم ی = ± خ √۱۵

اور قو$^{خ ی}$ = جم ی + خ جب ی = (۴ ± √۱۵) خ جس سے حاصل ہوتا ہے۔

خ ی = لوک (۴ ± √۱۵) خ

= لوک (۴ ± √۱۵) + لوک خ

= لوک (۴ + $\sqrt{۱۵}$) + (۲م + $\frac{۱}{۲}$) π خ

چونکہ (۴ + $\sqrt{۱۵}$) (۴ − $\sqrt{۱۵}$) = ۱

اسلیے لوک (۴ + $\sqrt{۱۵}$) = − لوک (۴ − $\sqrt{۱۵}$)

اور ہم نتیجہ کو شکل

ی = (۲م + $\frac{۱}{۲}$) π ± خ لوک (۴ + $\sqrt{۱۵}$) میں لکھ سکتے ہیں۔

مثال (۱۳) اگر لوک [مم (لا + خ ما)] = ۶ − خ و، تو ثابت کرو کہ

ممز ۶ = جمز ۲ ما قط ۲ لا اور مم و = جب ۲ لا قمز ۲ ما

ثابت کرو کہ اگر لا کی قیمت − $\frac{۱}{۲}$π اور + $\frac{۱}{۲}$π کے درمیان ہو تو و، اُسی ربع میں ہوتا ہے جس میں کہ دلیل (لا + خ ما) ہے۔

$و^{۶-خ و}$ = مم (لا + خ ما)

اور $و^{۶+خ و}$ = مم (لا − خ ما)

اس لیے $و^{۶+خ و}$ × $و^{۶-خ و}$ = $و^{۲۶}$

$$= \frac{\text{جم(لا + خ ما) جم(لا − خ ما)}}{\text{جب(لا + خ ما) جب(لا − خ ما)}}$$

$$= \frac{\text{(جم ۲ لا + جمز ۲ ما)}}{\text{(جمز ۲ ما − جم ۲ لا)}}$$

اِس لیے ممز ۶ = $\frac{و^{۲۶} + ۱}{و^{۲۶} - ۱}$

$$= \frac{\text{جمز ۲ ما}}{\text{جم ۲ لا}} = \text{جمز ۲ ما قط ۲ لا}$$

نیز $و^{(۲خ و)}$ = $و^{(۶+خ و)}$ × $و^{(۶-خ و)}$

جم (لا - خ ما) جب (لا + خ ما)
= ―――――――――――――――――――
جب (لا - خ ما) جم (لا + خ ما)

(جب ۲ لا + خ جبز ۲ ما)
= ―――――――――――――――――――
جب ۲ لا - خ جبز ۲ ما

اور مم ۲ و = خ [ئو^{۲خو} + ۱] / [ئو^{۲خو} - ۱] = ۲ خ جب ۲ لا / ۲ خ جبز ۲ ما = جب ۲ لا قمز ۲ ما

اب ہمیں بتانا ہے کہ اگر لا، مثبت یا منفی حادہ زاویہ ہو تو زاویہ و، اور دلیل (لا + خ ما) اُسی ربع میں ہیں۔

اب ئو^{-۲خو} = جم (لا + خ ما) جب (لا - خ ما) / جب (لا + خ ما) جب (لا - خ ما)

جس سے ئو [جم و - خ جب و] = جب ۲ لا - خ جبز ۲ ما / جمز ۲ ما - جم ۲ لا

اب حقیقی اور خیالی حصّوں کو مساوی رکھنے سے

ئو جم و = جب ۲ لا / جمز ۲ ما - جم ۲ لا

اور ئو جب و = جبز ۲ ما / جمز ۲ ما - جم ۲ لا

اب ئو مثبت ہے کیونکہ ء حقیقی ہے اور (جمز ۲ ما - جم ۲ لا) مثبت ہے کیونکہ جمز ۲ ما ۱/۲ سے کم نہیں ہو سکتا اور جم ۲ لا ۱ سے زیادہ نہیں ہو سکتا - پس جم و کی وہی علامت ہوگی جو جب ۲ لا کی ہے اور جب و کی وہی علامت ہے جو جبز ۲ ما کی ہے - اب چار صورتوں پر غور کرنا ہے

صورت اول:- اگر دلیل (لا + خ ما) پہلے ربع میں واقع ہو تو لا اور ما دونوں مثبت ہیں - جب ۲ لا مثبت ہے کیونکہ ۲ لا، صفر اور ۲۲ کے درمیان ہے اور جبز ۲ ما مثبت ہے - اِس لیے جب و اور جم و دونوں مثبت ہیں اور زاویہ و

پہلے ربع میں ہے -

صورت دوم :- اگر دلیل (لا + خ ما)، دوسرے ربع میں ہو تو ۲ لا، صفر اور π- کے درمیان ہے اور جب ۲ لا منفی ہے لیکن ما مثبت ہے۔ اس لیے زاویہ و ایسا ہے جس کی جیب التمام منفی ہے لیکن جیب مثبت ہے اور اس لیے یہ زاویہ دوسرے ربع میں ہے -

صورت سوم :- جب دلیل (لا + خ ما) تیسرے ربع میں ہو تو ۲ لا، صفر اور π- کے درمیان ہے اور جب ۲ لا منفی ہے نیز ما اور اس لیے جبز ما منفی ہے - اس صورت میں جب و اور جم و دونوں منفی ہیں اس لیے و تیسرے ربع کا زاویہ ہے -

صورت چہارم :- اگر دلیل (لا + خ ما) چوتھے ربع میں ہو تو ۲ لا، صفر اور π کے درمیان ہے - جب ۲ لا مثبت ہے لیکن جبز ۲ ما منفی ہے - اس لیے جم و مثبت ہے اور جب و منفی ہے - یعنے و چوتھے ربع کے اندر ہے -

سلسلوں کو جمع کرنا

بہت سے مثلثی سلسلے و$^{خ طہ}$ = جم طہ + خ جب طہ کے استعمال سے جمع کیے جا سکتے ہیں -

مثال (۱۴) سلسلہ

۱ + ر جم طہ + ر^{۲} جم ۲ طہ + ر^{۳} جم ۳ طہ + ... + ... کون رقموں تک جمع کرو -

فرض کرو کہ ج = ۱ + ر جم طہ + ر^{۲} جم ۲ طہ + ر^{۳} جم ۳ طہ

+ .... + ر$^{ن-۱}$ جم (ن-۱) طہ + ...

اور ص = ر جب طہ + ر^{۲} جب ۲ طہ + ر^{۳} جب ۳ طہ

+ .... + ر$^{ن-۱}$ جب (ن-۱) طہ + ...

تب $\text{ج} + \text{خ ص} = ۱ + \text{ر}(\text{جم طه} + \text{خ جب طه}) + \text{ر}^{۲}(\text{جم ۲ طه} + \text{خ جب ۲ طه}) + \text{ر}^{۳}(\text{جم ۳ طه} + \text{خ جب ۳ طه}) + \cdots$

یعنی $\text{ج} + \text{خ ص} = ۱ + \text{ر}\,\text{و}^{\text{خ طه}} + \text{ر}^{۲}\,\text{و}^{۲\,\text{خ طه}} + \text{ر}^{۳}\,\text{و}^{۳\,\text{خ طه}} + \cdots + \text{ر}^{\text{ن}-۱}\,\text{و}^{\text{خ}(\text{ن}-۱)\,\text{طه}} + + + +$

یعنی $$\text{ج} + \text{خ ص} = \frac{۱ - \text{ر}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{خ ن طه}}}{۱ - \text{ر}\,\text{و}^{\text{خ طه}}}$$

$$\text{ج} + \text{خ ص} = \frac{(۱ - \text{ر}^{\text{ن}}\,\text{و}^{\text{خ ن طه}})(۱ - \text{ر}\,\text{و}^{-\text{خ طه}})}{(۱ - \text{ر}\,\text{و}^{\text{خ طه}})(۱ - \text{ر}\,\text{و}^{-\text{خ طه}})}$$

$$= \frac{۱ - \text{ر}^{\text{ن}}(\text{و}^{\text{خ ن طه}}) - \text{ر}(\text{و}^{-\text{خ طه}}) + \text{ر}^{(\text{ن}+۱)}\,\text{و}^{\text{خ}(\text{ن}-۱)\,\text{طه}}}{۱ - \text{ر}\left[\text{و}^{\text{خ طه}} + \text{و}^{-\text{خ طه}}\right] + \text{ر}^{۲}}$$

$$= \frac{۱ - \text{ر}^{\text{ن}}\left[\text{جم ن طه} + \text{خ جب ن طه}\right] - \text{ر}\left[\text{جم طه} - \text{خ جب طه}\right] + \text{ر}^{(\text{ن}+۱)}\left[\text{جم}(\text{ن}-۱)\,\text{طه} + \text{خ جب}(\text{ن}-۱)\,\text{طه}\right]}{\left[۱ - ۲\,\text{ر جم طه} + \text{ر}^{۲}\right]}$$

$$= \frac{\left[۱ - \text{ر جم طه} - \text{ر}^{\text{ن}}\,\text{جم ن طه} + \text{ر}^{\text{ن}+۱}\,\text{جم}(\text{ن}-۱)\,\text{طه}\right] + \text{خ}\left[\text{ر جب طه} - \text{ر}^{\text{ن}}\,\text{جب ن طه} + \text{ر}^{\text{ن}+۱}\,\text{جب}(\text{ن}-۱)\,\text{طه}\right]}{\left[۱ - ۲\,\text{ر جم طه} + \text{ر}^{۲}\right]}$$

حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{ج} = \frac{\left[۱ - \text{ر جم طه} - \text{ر}^{\text{ن}}\,\text{جم ن طه} + \text{ر}^{\text{ن}+۱}\,\text{جم}(\text{ن}-۱)\,\text{طه}\right]}{\left[۱ - ۲\,\text{ر جم طه} + \text{ر}^{۲}\right]}$$

اور $\text{ص} = \dfrac{\left[\text{ر جب طہ} - \text{ر}^{\text{ن}}\ \text{جب ن طہ} + \text{ر}^{\text{ن}+1}\ \text{جب (ن} - 1\text{) طہ}\right]}{\left[1 - 2\ \text{ر جم طہ} + \text{ر}^{2}\right]}$

بالعموم جیب التمام والے سلسلوں کا مجموعہ معلوم کرنے کے ضمن میں جیب والے متناظر سلسلے کا مجموعہ بھی حاصل ہوتا ہے۔

مثال (۱۵) لامتناہی تک جمع کرو۔

$$\text{جب طہ} - \frac{1}{\lfloor 3}\ \text{جب ۳ طہ} + \frac{1}{\lfloor 5}\ \text{جب ۵ طہ} + \cdots\cdots$$

فرض کرو کہ $\text{ج} = \text{جب طہ} - \dfrac{1}{\lfloor 3}\ \text{جب ۳ طہ} + \dfrac{1}{\lfloor 5}\ \text{جب ۵ طہ} + \cdots\cdots$

اور $\text{ص} = \text{جم طہ} - \dfrac{1}{\lfloor 3}\ \text{جم ۳ طہ} + \dfrac{1}{\lfloor 5}\ \text{جم ۵ طہ} + \cdots\cdots$

تب $\text{ص} + \text{خ ج} = (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}) - \dfrac{1}{\lfloor 3}(\text{جم ۳ طہ} + \text{خ جب ۳ طہ})$

$$+ \frac{1}{\lfloor 5}(\text{جم ۵ طہ} + \text{خ جب ۵ طہ}) + \cdots\cdots$$

$$\text{ص} + \text{خ ج} = \text{و}^{\text{خ طہ}} - \frac{\text{و}^{\text{۳ خ طہ}}}{\lfloor 3} + \frac{\text{و}^{\text{۵ خ طہ}}}{\lfloor 5} + \cdots\cdots$$

یعنی $\text{ص} + \text{خ ج} = \text{جب}\left[\text{و}^{\text{خ طہ}}\right]$

$$= \text{جب}\left[\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}\right]$$

$= \text{جب (جم طہ) جم (خ جب طہ)} + \text{جم (جم طہ) جب (خ جب طہ)}$

$= \text{جب (جم طہ) جمز (جب طہ)} + \text{خ جم (جم طہ) جبز (جب طہ)}$

اِس لیے اِس مساوات کے دونوں جانب خیالی حصے کو مساوی رکھنے سے

ج = جم (جم طہ) جبز (جب طہ)

مثال (۱۶) ثابت کرو کہ

جب طہ × جب طہ − $\frac{1}{2}$ جب ۲ طہ جب^{2} طہ + $\frac{1}{3}$ جب ۳ طہ جب^{3} طہ

+ .... = مم$^{-1}$ (۱ + مم طہ + مم^{2} طہ)

فرض کرو کہ ج = جم طہ × جب طہ − $\frac{1}{2}$ جم ۲ طہ جب^{2} طہ + $\frac{1}{3}$ جم ۳ طہ جب^{3} طہ + ...

اور ص = جب طہ × جب طہ − $\frac{1}{2}$ جب ۲ طہ جب^{2} طہ + $\frac{1}{3}$ جب ۳ طہ جب^{3} طہ + ...

تب ج + خ ص = جب طہ × قو$^{\text{خ طہ}}$ − $\frac{1}{2}$ جب^{2} طہ قو$^{\text{۲ خ طہ}}$ + $\frac{1}{3}$ جب^{3} طہ قو$^{\text{۳ خ طہ}}$ ....

ج + خ ص = لوک [۱ + جب طہ قو$^{\text{خ طہ}}$]

= لوک [۱ + جب طہ (جم طہ + خ جب طہ)]

= لوک [۱ + جب طہ جم طہ + خ جب^{2} طہ]

ہم کو صرف خیالی حصّے کی ضرورت ہے۔

خ ص = خ مس$^{-1}$ $\dfrac{\text{جب}^{2}\text{ طہ}}{\text{۱ + جب طہ جم طہ}}$

= خ مم$^{-1}$ $\dfrac{\text{جب}^{2}\text{ طہ + جم}^{2}\text{ طہ + جب طہ جم طہ}}{\text{جب}^{2}\text{ طہ}}$

= خ مم$^{-1}$ [۱ + مم^{2} طہ + مم طہ]

اِس لیے دیا ہوا سلسلہ مساوی ہے مم$^{-1}$ [۱ + مم^{2} طہ + مم طہ]

امثلہ نمبری (۳)

(۱) حسب ذیل اعداد کو شکل را (جم طہ + خ جب طہ) میں لکھو

(۱) $\dfrac{(\text{ا} + \text{خ} \sqrt{3})}{(3 - 3 \times \text{خ})}$

(۲) $\dfrac{\text{و}^{\text{ا} + \text{خ ب}}}{[\text{مس طہ} + \text{خ}]}$

(۲) ڈی مائرے کے مسئلہ سے یا کسی طرح سے ثابت کرو کہ

جم⁸ طہ + جب⁸ طہ = (۱/۶۴) [جم ۸ طہ + ۲۸ جم ۴ طہ + ۳۵]

(۳) ثابت کرو کہ مس (ی + خ و)/۲ = (جب ی + خ جبز و)/(جم ی + جمز و)

(۴) اگر مس (طہ + خ فہ) = جب (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

ممز ما جبز ۲ فہ = مم لا جب ۲ طہ

(۵) اگر مس ما = مس عہ مسز بہ، اور مس ی = مم عہ مسز بہ تو ثابت کرو کہ

مس (ما + ی) = جبز ۲ بہ قمز ۲ عہ

(۶) اگر مس (ا + خ ب) = لا + خ ما، تو ثابت کرو کہ

لا² + ما² + ۲ لا مم ۲ ا = ۱، اور لا² + ما² − ۲ ما ممز ۲ ب = ۱

(۷) اگر مسز (ء + خ و) = لا + خ ما، تو لا اور ما کو ء اور و کی رقوم میں معلوم کرو نیز ء اور و کی قیمتیں معلوم کرو جبکہ لا = ما = ۱

جواب لا = جبز ۲ ء / (جمز ۲ ء + جم ۲ و)

ما = جب ۲ و / (جمز ۲ ء + جم ۲ و)

و = ½ (ن π − مس ½) جہاں ن = صفر، ±۱، ±۲، …

ء = ¼ لوک ۵

(۸) ثابت کرو کہ لوک [جب (لا + خ ما) / قم (لا − خ ما)] = ۲ خ مس⁻¹ (مسز ما مم لا)

(۹) اگر جمز (ء + خ و) = مس (ا + خ ب) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جمز ۲ء + جم ۲و} = \frac{\text{۲ [جمز ۲ب − جم ۲ا]}}{\text{جمز ۲ب + جم ۲ا}}$$

(۱۰) اگر مس (طہ + خ فہ) = جب (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جمز ما جمز ۲ فہ = مم لا جب ۲ طہ}$$

(۱۱) اگر ا + خ ب = ج مس (لا + خ ما) تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ۲ لا} = \frac{\text{۲ ج ا}}{\text{ج}^{۲}\text{ − ا}^{۲}\text{ − ب}^{۲}}$$

(۱۲) اگر جم (طہ + خ فہ) = ک (جم عہ + خ جب عہ) تو ثابت کرو کہ

$$\text{فہ} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{\text{جب (طہ − عہ)}}{\text{جب (طہ + عہ)}}$$

(۱۳) اگر مس (طہ + خ فہ) = جم عہ + خ جب عہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = \frac{\text{ن}\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}\ \text{اور فہ} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک مس}\left[\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{عہ}}{۲}\right]$$

(۱۴) مس$^{-۱}$ [جم طہ + خ جب طہ] کے حقیقی اور خیالی حصّے الگ الگ کرو۔

(۱۵) ثابت کرو کہ $\text{لوک}\left\{\frac{\text{جم (لا − خ ما)}}{\text{جم (لا + خ ما)}}\right\} = \text{۲ خ مس}^{-۱}\text{(مس لا مسز ما)}$

(۱۶) لوک لوک جب (لا + خ ما) کی قیمت معلوم کرو۔

ذیل کے سلسلوں کو لاانتناہی تک جمع کرو۔

(۱۷) $\text{جم طہ} - \frac{۱}{۳}\text{ جم ۳ طہ} + \frac{۱}{۵}\text{ جم ۵ طہ} \ldots\ldots$

(۱۸) $۱ - \frac{\text{جم ۲ طہ}}{|\underline{۲}} + \frac{\text{جم ۴ طہ}}{|\underline{۴}} - \frac{\text{جم ۶ طہ}}{|\underline{۶}} + \ldots\ldots$

(۱۹) $\text{جم طہ} + \frac{\text{قم طہ}}{|\underline{۱}}\text{ . جم ۲ طہ} + \frac{\text{قم}^{۲}\text{ طہ}}{|\underline{۲}}\text{ . جم ۳ طہ} + \ldots\ldots$

(۲۰) اگر $\text{ج} = \text{جم}^{۲}\text{ طہ} - \frac{۱}{۳}\text{ جم}^{۳}\text{ طہ جم ۳ طہ} + \frac{۱}{۵}\text{ جم}^{۵}\text{ طہ جم ۵ طہ} \ldots\ldots$

تو ثابت کرو کہ $\text{مس ۲ ج} = \text{۲ مم}^{۲}\text{ طہ}$

باب چہارم

ملتف متغیر کے تفاعل

۱۵۔ ملتف متغیر —— اگر لا اور ما حقیقی متغیر اعداد ہوں تو ی = (لا + خ ما) کو ملتف متغیر کہتے ہیں۔ نقطہ ن جو آرگینڈ کی شکل میں ی کو تعبیر کرتا ہے، لا اور ما کے ساتھ اپنا مقام بدلتا ہے۔ اگر لا اور ما دونوں (لا، ما) سے (لا۱، ما۱) تک مسلسل طور پر بدلیں تو نقطہ ن، ی مستوی میں نقطہ (لا، ما) سے (لا۱، ما۱) تک ایک مسلسل منحنی مرتسم کرتا ہے۔ اگر لا اور ما دونوں محدود ہوں تو ی کو بھی محدود کہتے ہیں۔ اگر لا اور ما دونوں غیر محدود ہوں تو، ی کو بھی غیر محدود کہتے ہیں۔

۱۶۔ تغیر کا راستہ —— حقیقی متغیر کے تفاعلوں کے نظریہ میں متبوع متغیر لا صرف وہی قیمتیں اختیار کرسکتا ہے جو لا محور کے نقاط کے متناظر ہوں۔ اِس کے برخلاف ملتف متغیر کے تفاعلوں کے نظریہ میں متبوع متغیر ی ابتدائی اور آخری نقطوں کو ملانے والے کسی راستے پر کے نقاط کی متناظر قیمتیں اختیار کرسکتا ہے۔

اگر ی کے طے شدہ راستے پر کوئی دو نقاط ن اور ن۱ ہوں اور

ل آخر میں ن، پر منطبق ہوں تو ایسے راستے کو یا اس منحنی کو بند منحنی کہتے ہیں۔

۱۷۔ یک قیمتی تفاعل

——جب ایک ملتف متغیر مقدار ھ کسی دوسری ملتف متغیر مقداری کے ساتھ اس طرح مربوط ہو کہ ی کی ایک قیمت کے جواب میں ھ کی ایک اور صرف ایک قیمت ہو تو ھ، کو ی کا **وحید القیمت** یا **یک قیمتی تفاعل** کہتے ہیں۔ مثلاً ی کا ایک کثیر الارقام جملہ۔ یا دو کثیر الارقام جملوں کی نسبت ی کا یک قیمتی تفاعل ہے۔

کثیر قیمتی تفاعل

——اگر ی کی ہر قیمت کے جواب میں ھ کی متعدد قیمتیں حاصل ہوں، تو ھ کو ی کا کثیر قیمتی تفاعل کہتے ہیں مثلاً $\sqrt{ی}$ ی کا دو قیمتی اور $\sqrt[ن]{ی}$ ن قیمتی تفاعل ہے۔

۱۸۔ انتہائیں

——اگر ف(ی) ایک یک قیمتی تفاعل ہو ی کا اور اگر کسی دی ہوئی چھوٹی مثبت مقدار صہ کے جواب میں جو کتنی ہی چھوٹی ہو ایک مثبت مقدار عا اس طرح وجود رکھتی ہو کہ

$|ف(ی) - ل| < صہ$، ی کی تمام قیمتوں کے لیے جب کہ $0 < |ی - ی_{1}| < عا$ تو کہا جاتا ہے کہ ف(ی) انتہا ل کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ی مائل بہ $ی_{1}$ ہوتا ہے۔

اختصار کی خاطر ہم لکھتے ہیں۔

$$\underset{ی \to ی_1}{نہا}\ ف(ی) = ل$$

ی مائل بہ لامتناہی تفاعل کی انتہا:

— اگر ایک

اختیاری مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک ایسا مثبت عدد ن معلوم ہو سکے کہ |ف (ی) - ل| < صہ جبکہ |ی| > ن تو کہا جاتا ہے کہ ف (ی) انتہا ل کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ی مائل بہ لامتناہی ہے اِسکو لکھتے ہیں۔

نہــــا ف (ی) = ل
ی ← ∞

لامتناہی انتہائیں ——— اگر کسی مثبت عدد ن کے جواب میں جو کتنا ہی بڑا ہو ایک ایسا مثبت عدد عا وجود رکھے کہ |ف (ی)| > ن جبکہ |ی - ی۱| < عا تو کہا جاتا ہے کہ ف (ی) انتہا لامتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ی مائل بہ ی۱ ہو۔

اگر انتہا ل، ی۱ کا تفاعل ل (ی۱) ہو اور ایک ایسا عا وجود رکھتا ہو، کہ ایک دیے ہوئے خطہ کے اندر تمام نقطوں ی۱ کے لیے |ف (ی) - ل (ی)| < صہ جبکہ |ی - ی۱| < عا، تو ف (ی) کو اس خطہ میں ل (ی۱) کی طرف یکساں طور پر مائل کہتے ہیں۔

۱۹- تسلسل ——— تفاعل ف (ی) کو ی۱ پر مسلسل کہتے ہیں اگر ف (ی) کی ایک معین قیمت ہو اور اگر نہــــا ف (ی) = ف (ی۱)
ی ← ی۱

تسلسل کی شرط کو حسب ذیل طریقے سے ظاہر کیا جاسکتا ہے :-

اگر کسی صہ کے جواب میں ایک عا ایسا معلوم ہو سکے کہ

|ف (ی) - ف (ی۱)| < صہ جبکہ |ی - ی۱| < عا

تو ف (ی) کو ی۱ پر مسلسل کہتے ہیں۔

ایک تفاعل ایک خطہ میں مسلسل ہوتا ہے اگر وہ اس خطہ کے تمام نقطوں پر مسلسل ہو۔

یکساں تسلسل ——— ایک تفاعل ف (ی) کو ایک دیے ہوئے

خطہ میں یکساں طور پر مسلسل کہتے ہیں اگر کسی اختیاری صہ کے جواب میں ایک ایسا عا معلوم ہو سکے کہ اس خطہ کے اندر ہر نقطہ ی، کے لیے

|ف (ی)- ف (ی،)| < صہ جبکہ | ی - ی،| < عا

یعنے اگر ف (ی) اُس خطہ کے اندر ف (ی،) کی طرف یکساں طور پر مائل ہو۔

مسئلہ۔ اگر ف (ی) ایک دیے ہوئے خطہ میں مسلسل ہو تو وہ اس خطہ میں یکساں مسلسل ہوگا۔ ثبوت کے لیے دیکھو [ملتف متغیر کے تفاعل از میاک رابرٹ Macrobert]

۲۰ - تفرق Differentiation

ملتف متغیر ی کے تفاعل ف (ی) کے مشتق کی تعریف، حقیقی متغیر کے مشتق کی تعریف کے بالکل مماثل طریقہ پر کی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ ی. کے قریب ایک متغیر نقطہ ی ہے۔

نیز فرض کرو کہ مف ی ≡ ی - ی.

اور مف صہ = ف (ی) - ف (ی.) = ف (ی. + مف ی) - ف (ی.)

تب اگر انتہا $_{\text{مف ی} \to}$ مف صہ / مف ی = نہیا $_{\text{مف ی} \to}$ [ف (ی. + مف ی) - ف (ی.)] / مف ی

وجود رکھتی ہو تو اس انتہا کو نقطہ ی. پر ف (ی) کا **مشتق** کہتے ہیں۔

اُس صورت میں مشتق دو ملتف متغیروں مف صہ اور مف ی کے انتہاؤں کی نسبت ہے۔

انتہاؤں کے نظریہ سے یہ ظاہر ہے کہ مف صہ / مف ی کی انتہائی قیمت ی کے ی. کے قریب آنے کے راستے پر منحصر نہیں ہے۔ یعنے یہ مشتق مف ی کے دلیل پر منحصر نہیں ہے۔

۲۱۔ تحلیلی تفاعل

——— اگر ی کا کوئی تفاعل ف (ی)، کسی نقطہ (ی ا) پر یک قیمتی، مسلسل اور تفرق پذیر ہو تو ف (ی) کو نقطہ ی ا پر تحلیلی تفاعل کہتے ہیں۔

اگر ف (ی) ایک خطہ کے اندر تمام نقاط پر تحلیلی ہو تو اس کو اُس خطہ کے اندر تحلیلی کہتے ہیں۔

اب ہم اس کے لیے ضروری اور کافی شرائط معلوم کرتے ہیں کہ ی کا کوئی دیا ہوا تفاعل ف (ی) تحلیلی ہو۔

(ا) ضروری شرائط کہ ف (ی) تحلیلی ہو۔

فرض کرو کہ ھ = (ع + خ و)، ی کا ایک تحلیلی تفاعل ہے، جہاں ع، اور و (لا اور ما) کے تفاعل ہیں۔ تب تحلیلی تفاعل کی تعریف سے ضروری ہے کہ اس کا تفرق سریگانہ طور پر وجود رکھتا ہو۔

یعنے $\frac{\text{مف ھ}}{\text{مف ی}}$ کی انتہا یگانہ طور پر وجود رکھتی ہو جبکہ مف ی، کسی طور پر مائل بہ صفر ہو۔

فرض کرو کہ لا، ما، ی اور ھ کے متناظر چھوٹے اضافے مف لا، مف ما، مف ی اور مف ھ ہیں۔

تب مف ھ = مف ع + خ مف و

اور مف ی = مف لا + خ مف ما

یعنے $\frac{\text{مف ھ}}{\text{مف ی}} = \frac{\text{مف ع + خ مف و}}{\text{مف لا + خ مف ما}}$

$\text{نہا}_{\text{مف ی} \leftarrow} \frac{\text{مف ھ}}{\text{مف ی}} = \text{نہا}_{\text{مف ی} \leftarrow} \frac{\text{مف ع + خ مف و}}{\text{مف لا + خ مف ما}}$

اب مف ی کو اِس طرح بدلو کہ مف ما = صفر یعنے ما کو مستقل سمجھو۔

$$\text{تب}\quad \frac{\text{مف ھ}}{\text{مف ی}} = \frac{\text{ع}(\text{لا}+\text{مف لا}،\ \text{ما}) - \text{ع}(\text{لا}،\ \text{ما})}{\text{مف لا}} + \text{خ}\ \frac{\text{و}(\text{لا}+\text{مف لا}،\ \text{ما}) - \text{و}(\text{لا}،\ \text{ما})}{\text{مف ما}}$$

اب اس خارج قسمت کی انتہا کی ایک معین انتہا ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ ع اور و کے جزوی تفرقی سر بلحاظ لا کے وجود رکھتے ہوں اور اُس صورت میں

$$\text{نہا}\ \frac{\text{مف ھ}}{\text{مف ی}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{خ}\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$$

اب پھر لا کو مستقل سمجھ کر ی کو بدلو تب ما بدل کر ما+مف ما ہوگا۔

$$\text{اس صورت میں}\quad \frac{\text{مف ھ}}{\text{مف ی}} = \frac{\text{ع}(\text{لا}،\ \text{ما}+\text{مف ما}) - \text{ع}(\text{لا}،\ \text{ما})}{\text{خ مف ما}} + \text{خ}\ \frac{\text{و}(\text{لا}،\ \text{ما}+\text{مف ما}) - \text{و}(\text{لا}،\ \text{ما})}{\text{خ مف ما}}$$

$$= \frac{\text{ع}(\text{لا}،\ \text{ما}+\text{مف ما}) - \text{ع}(\text{لا}،\ \text{ما})}{\text{خ مف ما}} + \frac{\text{و}(\text{لا}،\ \text{ما}+\text{مف ما}) - \text{و}(\text{لا}،\ \text{ما})}{\text{مف ما}}$$

اور اس صورت میں خارج قسمت انتہا

$$\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} - \text{خ}\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$$

ہوگی بشرطیکہ ع اور و کے جزوی تفرقی سر بلحاظ ما کے وجود رکھتے ہوں۔

اب خارج قسمت کی انتہا دونوں صورتوں میں مساوی ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \text{خ}\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} - \text{خ}\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{یعنی}\quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \\ &\text{اور}\quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} \end{aligned}\right\} \quad (۱)$$

ان مساواتوں کو کوشی - ریمان کی تفرقی مساواتیں کہتے ہیں۔

اس سے معلوم ہوا کہ ص = (ع + خ و) کے تحلیلی ہونے کے لیے ضروری شرائط یہ ہیں کہ ع اور و کے جزوی تفرقی سر $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$، $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$ وجود رکھتے ہوں اور یہ کوشی - ریمان مساواتوں کو پورا کرتے ہوں۔

یہ شرائط ضروری ہیں لیکن کافی نہیں ہیں۔

کافی شرائط :- ی کے تفاعل ف (ی) کو تحلیلی ہونے کے لیے کافی شرائط یہ ہیں کہ $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$، $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$ وجود رکھتے ہوں کوشی - ریمان مساواتوں کو پورا کرتے ہوں اور

یہ تفرقی سر مسلسل ہوں

اب مف ع = ع(لا + مف لا، ما + مف ما) - ع(لا، ما)

= ع(لا + مف لا، ما + مف ما) - ع(لا + مف لا، ما) + ع(لا + مف لا، ما) - ع(لا، ما)

تب تفرقی احصا کے مسئلہ اوسط سے

$$\text{مف ع} = \text{مف ما}\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\ (\text{لا} + \text{مف لا، ما} + \text{طہ مف ما})$$

$$+\ \text{مف لا}\ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ (\text{لا} + \text{طہَ مف لا، ما})$$

جہاں ۰ < طہ < ۱ اور ۰ < طہَ < ۱

اب چونکہ $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ مسلسل ہیں اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{مف ع} = \text{مف لا} \left\{ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}(\text{لا، ما}) + \text{صہ} \right\} + \text{مف ما} \left\{ \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}(\text{لا، ما}) + \text{صہَ} \right\}$$

جہاں صہ اور صَہ مائل بہ صفر جبکہ |مف ی| ← صفر

اسی طرح سے مف و = مف لا $\left\{\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right.$ (لا، ما) + عا $\}$

+ مف ما $\left\{\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right.$ (لا، ما) + عاَ $\}$

جہاں عا اور عاَ دونوں صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں جبکہ |مف ی| ← صفر

اس لیے مف ھ = مف ع + خ مف و

= مف لا $\left\{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right.$ (لا، ما) + صہ $\}$ + مف ما $\left\{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right.$ (لا، ما) + صَہ $\}$

+ خ مف لا $\left\{\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right.$ (لا، ما) + عا $\}$ + خ مف ما $\left\{\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right.$ (لا، ما) + عاَ $\}$

= مف لا $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right.$ + خ $\left.\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right)$ + مف ما $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\right.$ + خ $\left.\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\right)$

+ سہ مف لا + سَہ مف ما

جہاں سہ اور سَہ مائل بہ صفر جبکہ |مف ی| ← صفر

اب کوشی ریمان مساواتوں کی مدد سے $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$

اور $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = -\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$

اس لیے مف ھ = مف لا $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right.$ + خ $\left.\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right)$

+ مف ما $\left(-\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right.$ + خ $\left.\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right)$ + سہ مف لا + سَہ مف ما

مف ھ = مف لا $\left(\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right.$ + خ $\left.\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\right)$

+ خ مف ما $\left(\right.$خ $\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$ + $\left.\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\right)$ + سہ مف لا + سَہ مف ما

مف ھ = (مف لا + خ مف ما) (جف ء / جف لا + خ جف و / جف لا)
+ سہ مف لا + سَہ مف ما

اس لیے نہا (مف ی ← ۰) ، مف ھ / مف ی = فرھ / فری = جف ء / جف لا + خ جف و / جف ما

چونکہ | (سہ مف لا + سَہ مف ما) / مف ی | ≧ | سہ | + | سَہ |

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ ف (ی) کو تحلیلی ہونے کے لیے کافی شرائط یہ ہیں کہ ء اور و کے جزوی تفرقی سر مسلسل ہوں۔

اس لیے اگر ھ = ف (ی) تحلیلی تفاعل ہو تو

ف َ (ی) = جف ء / جف لا + خ جف و / جف لا
= جف و / جف ما − خ جف ء / جف ما
= جف ء / جف لا − خ جف ء / جف ما
= جف و / جف ما + خ جف و / جف لا

یعنے فَ (ی) کی قیمت مندرجہ بالا شکلوں میں سے کسی ایک میں لکھی جا سکتی ہے۔

اگر ھ = ء + خ و ، جہاں ء اور و ، لا اور ما کے تفاعل ہوں تو چونکہ

لا = ۱/۲ (ی + یَ) اور ما = ۱/۲خ (ی − یَ)

ء اور و کو دو تنوع متغیروں ی اور یَ کے تفاعل سمجھ سکتے ہیں۔

اگر ء اور و کے پہلے رتبہ کے جزوی تفرقی سر مسلسل ہوں تو اس

کے لیے شرط کہ ھ، $\bar{ی}$ پر منحصر نہ ہو یہ ہے $\frac{جف\ ھ}{جف\ \bar{ی}} =$ صفر

یعنی $\frac{جف\ ع}{جف\ \bar{ی}} + خ \frac{جف\ و}{جف\ \bar{ی}} =$ صفر

$$\left(\frac{جف\ ع}{جف\ لا}\frac{جف\ لا}{جف\ \bar{ی}} + \frac{جف\ ع}{جف\ ما}\frac{جف\ ما}{جف\ \bar{ی}}\right) + خ\left(\frac{جف\ و}{جف\ لا}\frac{جف\ لا}{جف\ \bar{ی}} + \frac{جف\ و}{جف\ ما}\frac{جف\ ما}{جف\ \bar{ی}}\right) = \text{صفر}$$

یعنی $\frac{1}{2}\frac{جف\ ع}{جف\ لا} - \frac{1}{2\,خ}\frac{جف\ ع}{جف\ ما} + \frac{خ}{2}\frac{جف\ و}{جف\ لا} - \frac{1}{2}\frac{جف\ و}{جف\ ما} =$ صفر

یعنی $\frac{1}{2}\frac{جف\ ع}{جف\ لا} + \frac{خ}{2}\frac{جف\ ع}{جف\ ما} + \frac{خ}{2}\frac{جف\ و}{جف\ لا} - \frac{1}{2}\frac{جف\ و}{جف\ ما} =$ صفر

حقیقی اور خیالی حصّوں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{جف\ ع}{جف\ لا} - \frac{جف\ و}{جف\ ما} = \text{صفر}$$

$$\frac{جف\ ع}{جف\ ما} + \frac{جف\ و}{جف\ لا} = \text{صفر}$$

یعنی $\frac{جف\ ع}{جف\ لا} = \frac{جف\ و}{جف\ ما}$ ، اور $\frac{جف\ ع}{جف\ ما} = -\frac{جف\ و}{جف\ لا}$ جو کوشی۔ریمان مساواتیں ہیں۔ اس لیے تحلیلی تفاعلوں کی صورت میں لا اور ما صرف اجتماع (لا + خ ما) کے طور پر واقع ہو سکتے ہیں مثلاً یہ ظاہر ہے کہ جب (لا + ۲ خ ما) = جب (۲ ی − $\bar{ی}$) تحلیلی تفاعل نہیں ہو سکتا۔

کوشی۔ریمان مساواتوں کو اگر قطبی محددوں میں بیان کیا جائے تو یہ ہو جاتی ہیں۔

$$\frac{جف\ ع}{جف\ ر} = \frac{1}{ر}\frac{جف\ و}{جف\ طہ}\ ،\ \frac{1}{ر}\frac{جف\ ع}{جف\ طہ} = -\frac{جف\ و}{جف\ ر}$$

اور اُس صورت میں مشتق حسبِ ذیل طریقہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\frac{\text{وھ}}{\text{وی}} = \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ر}}\ \frac{\text{جف ر}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف طہ}} \times \frac{\text{جف طہ}}{\text{جف لا}}$$

$$= \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ر}}\ \text{جم طہ} - \left(-\text{ر}\ \frac{\text{جف و}}{\text{جف ر}} + \text{خ ر}\ \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ر}}\right) \frac{\text{جب طہ}}{\text{ر}}$$

$$= (\text{جم طہ} - \text{خ جب طہ})\ \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ر}}$$

۲۲ - مزدوج تفاعل

—— اگر (ء + خ و) = ف (لا + خ ما)، جہاں ف (ی)، ملتف متغیر ی کا تحلیلی تفاعل ہے تو ء اور و کو جو دو حقیقی متغیروں لا اور ما کے تفاعل ہیں **مزدوج تفاعل** کہا جاتا ہے۔

ء اور و کے جزوی تفرقی سر ذیل کی رشتوں سے مربوط ہیں۔

$$\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}} = -\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$$

اگر یہ فرض کیا جائے کہ دوسرے رتبہ کے جزوی تفرقی سر وجود رکھتے ہوں اور رشتہ $\frac{\text{جف}^2\ \text{ء}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\ \text{ء}}{\text{جف ما جف لا}}$ کو پورا کرتے ہیں تو جزوی تفرق سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{جف}^2\ \text{ء}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\ \text{ء}}{\text{جف لا}^2} = -\frac{\text{جف}^2\ \text{ء}}{\text{جف ما}^2} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف}^2\ \text{ء}}{\text{جف لا جف ما}} = -\frac{\text{جف}^2\ \text{و}}{\text{جف لا}^2} = \frac{\text{جف}^2\ \text{و}}{\text{جف ما}^2}$$

یعنے ء اور و دونوں دو ابعاد میں لاپلاس کی مساوات۔

$$\frac{\text{جف}^2\ \text{فہ}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\ \text{فہ}}{\text{جف ما}^2} = \text{صفر}$$

کو پورا کرتے ہیں۔

یہ مساوات ہمیشہ ریاضیاتی طبیعیات (Mathematical Physics) میں نمودار ہوتی ہے۔

ی کے کسی تفاعل ف (ی) کے حقیقی اور خیالی حصّے الگ کرنے سے ہم کو لاپلاس کی مساوات کے دو حل حاصل ہوتے ہیں - ان حلوں کو **موسیقی تفاعل** کہتے ہیں - اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ ملتف متغیر کے تفاعلوں کا نظریہ، دو ابعاد میں ریاضیاتی طبیعیات کے سوالوں کو حل کرنے میں کافی اہمیت رکھتا ہے -

تحلیلی تفاعل معلوم کرنا جبکہ اسکا حقیقی یا خیالی حصہ دیا گیا ہو -

اگر تفاعل ع یا و دیا ہوا ہو تو اُس کا متناظر تحلیلی تفاعل ھ وجود نہیں رکھتا جب تک کہ دیا ہوا تفاعل موسیقی نہ ہو - اگر یہ شرط پوری ہو یعنے ع یا و لاپلاس کی مساوات کو پورا کریں تو تفاعل ھ، کوشی - ریمان مساواتوں کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے - مثلاً اگر ع، یک قیمتی مسلسل تفاعل ہو جو لاپلاس کی مساوات کو پورا کرتا ہے -

تو درو = (جف و / جف لا) درلا + (جف و / جف ما) درما = − (جف ع / جف ما) درلا + (جف ع / جف لا) درما

کامل تفرقہ ہے اور اس لیے و معلوم کیا جا سکتا ہے -

اسی طرح سے اگر و، یک قیمتی مسلسل تفاعل ہو جو لاپلاس کی مساوات کو پورا کرتا ہے تو

درع = (جف ع / جف لا) درلا + (جف ع / جف ما) درما = (جف و / جف ما) درلا − (جف و / جف لا) درما

کامل تفرقہ ہے اور اس لیے ع معلوم کیا جا سکتا ہے -

ع اور و معلوم ہو جائیں تو تحلیلی تفاعل ھ = (ع + خ و) لکھا جا سکتا ہے -

مثال (۱) ثابت کرو کہ $\text{ع} = \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا ما}^{۲} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۳\,\text{ما}^{۲} + ۱$، ایک موسیقی تفاعل ہے اور اِس کا متناظر تحلیلی تفاعل معلوم کرو۔

تفاعل موسیقی ہے یعنے یہ ثابت کرنا ہے کہ ع لاپلاس کی مساوات

$$\frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{۲}} + \frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{۲}} = \text{صفر}$$

کو پورا کرتا ہے۔

$$\text{ع} = \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا ما}^{۲} + ۳\,\text{لا}^{۲} - ۳\,\text{ما}^{۲} + ۱$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = ۳\,\text{لا}^{۲} - ۳\,\text{ما}^{۲} + ۶\,\text{لا}$$

$$\frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{۲}} = ۶\,\text{لا} + ۶$$

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = -۶\,\text{لا ما} - ۶\,\text{ما}$$

$$\frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{۲}} = -۶\,\text{لا} - ۶$$

اِس لیے $\frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ع}}{\text{جف لا}^{۲}} + \frac{\text{جف}^{۲}\,\text{ع}}{\text{جف ما}^{۲}} = (۶\,\text{لا} + ۶) - (۶\,\text{لا} + ۶) = \text{صفر}$

یعنے ع لاپلاس کی مساوات کو پورا کرتا ہے اِس لیے یہ موسیقی تفاعل ہے۔

اب تحلیلی تفاعل $\text{ھ} = (\text{ع} + \text{خ و})$ معلوم کرنے کے لیے ہم کو و کی قیمت چاہیے۔

$$\text{ڈو} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}\,\text{ڈلا} + \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}\,\text{ڈما} = -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{ڈلا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{ڈما}$$

$$\text{ڈو} = -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\,\text{ڈلا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\,\text{ڈما}$$

$$\text{ڈو} = -(-۶\,\text{لا ما} - ۶\,\text{ما})\,\text{ڈلا} + (۳\,\text{لا}^{۲} - ۳\,\text{ما}^{۲} + ۶\,\text{لا})\,\text{ڈما}$$

$$\text{ڈو} = (۶\,\text{لا ما} + ۶\,\text{ما})\,\text{ڈلا} + (۳\,\text{لا}^{۲} - ۳\,\text{ما}^{۲} + ۶\,\text{لا})\,\text{ڈما}$$

مساوات (۶ لا ما + ۶ ما) فرلا + (۳ لا^{۲} − ۳ ما^{۲} + ۶ لا) فرما کو ٹھیک تفرقی مساوات ہونا چاہیے ٹھیک تفرقی مساوات کی جانچ سے ہم دیکھتے ہیں $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ = ۶ لا + ۶

اور $\frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}}$ = ۶ لا + ۶

یعنے اوپر کی مساوات ٹھیک تفرقی مساوات ہے اور جس کا ہونا لازمی ہے۔ اس لیے مساوات

فرو = (۶ لا ما + ۶ ما) فرلا + (۳ لا^{۲} − ۳ ما^{۲} + ۶ لا) فرما کا حل ہے۔

و = $\frac{۶ \text{ لا}^{۲}}{۲}$ ما + ۶ لا ما + ۳ لا^{۲} ما − $\frac{۳ \text{ ما}^{۳}}{۳}$ + ۶ لا ما + م

و = ۳ لا^{۲} ما + ۶ لا ما − ما^{۳} + م [۳ لا^{۲} ما اور ۶ لا ما کو کاٹ دیا گیا ہے جو کہ ٹھیک تفرقی مساوات کو حل کرنے کا طریقہ ہے]

اس لیے ہ = ع + خ و = (لا^{۳} − ۳ لا ما^{۲} + ۳ لا^{۲} − ۳ ما^{۲} + ۱) + خ (۳ لا^{۲} ما + ۶ لا ما − ما^{۳} + م)

= (لا^{۳} + ۳ خ لا^{۲} ما − ۳ لا ما^{۲} − خ ما^{۳}) + ۳ (لا^{۲} − ما^{۲} + ۲ خ لا ما) + ۱ + م خ

= (لا + خ ما)^{۳} + ۳ (لا + خ ما)^{۲} + ۱ + م خ

= ی^{۳} + ۳ ی^{۲} + ۱ + م خ جہاں م ایک حقیقی مستقل ہے۔

۲۳ - اگر تحلیلی تفاعل کا حقیقی یا خیالی حصہ دیا ہوا ہو تو تحلیلی تفاعل معلوم کرنے کا (Milne-Thompson) کا طریقہ -

فرض کرو کہ ف (ی) = ع (لا، ما) + خ و (لا، ما)

تب اگر $\overline{\text{ی}}$ = (لا − خ ما)

تو لا = $\frac{\text{ی} + \overline{\text{ی}}}{۲}$ اور ما = $\frac{\text{ی} - \overline{\text{ی}}}{۲\text{ خ}}$

اس سے ہم ف (ی) کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

ف (ی) = ع [(ی + یؔ)/۲ ، (ی − یؔ)/۲خ] + خ و [(ی + یؔ)/۲ ، (ی − یؔ)/۲خ]

چونکہ یہ ایک مساوات متماثلہ ہے یؔ کو کوئی قیمت دی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ یؔ = ی

تب ف (ی) = ع (ی، ۰) + خ و (ی، ۰) .... (۱)

اِس لیے ی کا کوئی تفاعل شکل ف۱ (ی) + خ ف۲ (ی) کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ جہاں ف۱ (ی) اور ف۲ (ی) حقیقی ہیں جبکہ ی حقیقی ہے۔

اب فرض کرو کہ ع (لا، ما) دیا گیا ہے جو لاپلاس کی مساوات کو پورا کرتا ہے۔

تب اگر ف (ی) = ع (لا، ما) + خ و (لا، ما)

تو فَ (ی) = جف ع / جف لا + خ جف و / جف لا [چونکہ ف (ی) تحلیلی ہے]

= جف ع / جف لا − خ جف ع / جف ما [کوشی - ریمان مساواتوں سے]

اب اگر جف ع / جف لا کی بجائے ہم فہ۱ (لا، ما) اور جف ع / جف ما کی بجائے فہ۲ (لا، ما) لکھیں، تو

فَ (ی) = فہ۱ (لا، ما) − خ فہ۲ (لا، ما)

= فہ۱ (ی، ۰) − خ فہ۲ (ی، ۰) [جہاں ہم نے مساوات (۱) کو استعمال کیا ہو]

تکمل کرنے سے ف (ی) = ∫ [فہ۱ (ی، ۰) − خ فہ۲ (ی، ۰)] ڈی + ج

جہاں ج ایک اختیاری مستقل ہے۔ تکمیل کا عمل اُسی طرح کیا جائے کہ گویا ی حقیقی ہے۔

اگر تحلیلی تفاعل کا خیالی حصہ و دیا گیا ہو، تو بالکل اِسی طرح کا عمل

کیا جاتا ہے۔

$$\text{فَ(ی)} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}} + \text{خ}\,\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$$

$$= \text{سہ}_1\text{(لا، ما)} + \text{خ سہ}_2\text{(لا، ما)}$$

$$= \text{سہ}_1\text{(ی، ۰)} + \text{خ سہ}_2\text{(ی، ۰)}$$

جہاں $\text{سہ}_1\text{(لا، ما)} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}$ اور $\text{سہ}_2\text{(لا، ما)} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}$

تب $\text{ف(ی)} = \int [\text{سہ}_1\text{(ی، ۰)} + \text{خ سہ}_2\text{(ی، ۰)}]\,\text{فری} + \text{ا}$

جہاں ا اختیاری مستقل ہے۔

مثال (۲) فرض کرو کہ ع = ۲ لا ما

تب $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{۲ ما}$ ، $\frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف لا}^2} = \text{صفر}$

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{۲ لا}$ ، $\frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف ما}^2} = \text{صفر}$

اس لیے $\frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\text{ ع}}{\text{جف ما}^2} = \text{صفر}$

یعنے ع = ۲ لا ما ، ایک موسیقی تفاعل ہے جو لاپلاس کی مساوات کو پورا کرتا ہے۔

اب $\text{ف(ی)} = \int [\text{فہ}_1\text{(ی، ۰)} - \text{خ فہ}_2\text{(ی، ۰)}]\,\text{فری} + \text{ج}$

جہاں $\text{فہ}_1 = \text{ع}_{\text{لا}}$ اور $\text{فہ}_2 = \text{ع}_{\text{ما}}$

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{۲ ما}$ اس لیے $\text{فہ}_1\text{(ی، ۰)} = \text{ع}_{\text{لا}}\text{(ی، ۰)} = \text{صفر}$

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{۲ لا}$ اس لیے $\text{فہ}_2\text{(ی، ۰)} = \text{ع}_{\text{ما}}\text{(ی، ۰)} = \text{۲ ی}$

اِس لیے ف(ی) = ∫(−۲ خ ی قری) = −خ (ی² + ا) جہاں ا اختیاری حقیقی مستقل ہے۔

مثال (۳) فرض کرو کہ و = قولا جم ما

تب (جف و)/(جف لا) = قولا جم ما ، (جف² و)/(جف لا²) = قولا جم ما

(جف و)/(جف ما) = − قولا جب ما ، (جف² و)/(جف ما²) = − قولا جم ما

اِس لیے (جف² و)/(جف لا²) + (جف² و)/(جف ما²) = قولا جم ما − قولا جم ما = صفر

یعنے و ایک موسیقی تفاعل ہے۔

اب ف(ی) = ∫[سہ₁(ی، ۰) + خ سہ₂(ی، ۰)] قری + ب

سہ₁ = و_ما اور سہ₂ = و_لا

(جف و)/(جف ما) = − قولا جب ما ، اِس لیے سہ₁(ی، ۰) = − قوی جب (۰) = صفر

(جف و)/(جف لا) = قولا جم ما اِس لیے سہ₂(ی، ۰) = قوی جم(۰) = قوی

اِس لیے ف(ی) = ∫خ قوی قری + ب = خ قوی + ب جہاں ب حقیقی مستقل ہے۔

۲۴- منحنی ع = مستقل اور و = مستقل —

اگر (ع + خ و) = ف(لا + خ ما)، جہاں ف(ی)، ی کا یک قیمتی تفاعل ہو، تو مزدوج تفاعل ع، اور و بھی لا اور ما کے یک قیمتی تفاعل ہونگے۔

ی مستوی کے ایک دیے ہوئے نقطہ ی. (= لا. + خ ما.) میں سے منحنیوں کے نظام ع = مستقل اور و = مستقل کا ایک اور صرف ایک منحنی گزرے گا۔
ان منحنیوں کی مساواتیں ہونگی۔

ع (لا، ما) = ع (لا.، ما.) اور و (لا، ما) = و (لا.، ما.)

مثلاً اگر (ع + خ و) = (لا + خ ما)^{۲}، تو یہ منحنی قائم زائدہ لا^{۲} − ما^{۲} = لا.^{۲} − ما.^{۲} اور لا ما = لا. ما. ہیں۔

منحنیوں کے ان دو نظاموں کو ہم بالترتیب منحنیوں کے ع ـ نظام اور و ـ نظام سے تعبیر کرینگے۔

فرض کرو کہ (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما)، منحنی ع = مستقل پر کے دو قریبی نقطوں کے محدد ہیں۔ تب

ع (لا + مف لا، ما + مف ما) − ع (لا، ما) = صفر

اِس مساوات کو صرف پہلے رُتبہ کی رقموں تک ٹیلر کے مسئلہ سے پھیلانے سے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}\ \text{ور لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}\ \text{ور ما} = \text{صفر}$$

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی نقطہ (لا، ما) پر $\frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}}$ کی قیمت یعنے منحنی ع کا نقطہ (لا، ما) پر ڈھال (Gradient) $-\dfrac{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}}$ ہے۔

اِسی طرح سے (و ـ نظام) کے منحنی کا نقطہ (لا، ما) پر ڈھال $-\dfrac{\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}}$ ہے

اِس لیے ان دونوں منحنیوں کا اُنکے نقطہ تقاطع (لا، ما) پر ڈھالوں

کا حاصلِ ضرب

$$= -\frac{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}} \times -\frac{\frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف و}}{\text{جف ما}}} = -\frac{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}} \times -\frac{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}}{\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}}$$

[کوشی - ریمان مساواتوں سے]

$$= -1$$

اور ہم ایک اہم نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ

ع نظام اور و نظام کے منحنی باہم زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

مثال (۴) اگر $(\text{ع} + \text{خ و}) = \frac{1}{\text{ی}}$ تو ع، و نظام معلوم کرو۔

$$\text{ع} - \text{خ و} = \frac{1}{\text{ی}} = \frac{1}{\text{لا} + \text{خ ما}} = \frac{\text{لا} - \text{خ ما}}{(\text{لا} + \text{خ ما})(\text{لا} - \text{خ ما})} = \frac{\text{لا} - \text{خ ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

جس سے $\text{ع} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

اور $\text{و} = -\frac{\text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$

تب اگر ع = مستقل منحنی کا نظام ہو تو

$\frac{\text{لا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = \text{ک}$ یعنے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\,\text{ک لا}$، ع نظام کے منحنی ہیں

جہاں ک اختیاری مستقل ہے۔

اور $\frac{-\text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = \text{کَ}$ یعنے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\,\text{کَ ما}$، و نظام کے منحنی ہیں

جہاں کَ اختیاری مستقل ہے۔

یہ بالترتیب محوروں و ما اور و لا کو مبداء و پر مس کرنے والے

دائروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ ع نظام کا ہر دائرہ، و نظام کے ہر دائرہ کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

مثال (۵) اگر (ع + خ و) = لوک ی

تو ع = لوک ر

اور و = دلیل ی

اِس لیے منحنی ع = مستقل، دائرے ہیں جن کے مرکز مبداء پر ہیں اور و = مستقل مبداء میں سے نکلنے والے خطوط ہیں جو دائروں کو علی القوائم قطع کرتے ہیں۔

۲۵ - نادر نقطے ــــ تفاعل $\frac{1}{(ی - ا)}$، اُس خطہ کے اندر تحلیلی ہے جس میں نقطہ ی = ا شامل نہیں ہے نقطہ ی = ا پر تفاعل کی قیمت محدود نہیں ہے۔ اِس نقطہ ا کو **نادر نقطہ** کہتے ہیں۔ اور تفاعل کی اُس نقطہ پر **نادریت** ہونا کہتے ہیں۔

اگر تفاعل ف (ی)، ی = ا پر محدود نہ ہو لیکن ایک ایسا ن معلوم کیا جاسکے کہ (ی - ا)ن ف (ی) ایک انتہا کی طرف مائل ہو، جو صفر کے مساوی نہیں ہے، تو کہا جاتا ہے کہ تفاعل ف (ی) کا ی = ا پر **ن ویں رتبہ کا قطب** ہے۔

تعریف کی بموجب $\frac{1}{(ی - ا)}$ کا ا پر پہلے رتبہ کا قطب ہے یعنے یہ **سادہ قطب** ہے۔

اگر نادر نقطہ کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچا جائے کہ اِس کے اندر تفاعل کی کوئی نادریت نہ ہو تو اِس نادریت کو **جداگانہ نادریت** کہتے ہیں۔

تفاعل $\frac{1}{\text{جب} \frac{1}{ی}}$ کی ی = ۰ پر **غیر جداگانہ نادریت** ہے کیونکہ

جب $\left(\frac{1}{ی}\right)$ صفر ہے جبکہ ی = $\frac{1}{\text{ک}\,\pi}$ جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے اور یہ ناممکن ہے کہ مبداء کو ایک ایسے دائرہ سے گھیرا جائے جس کے اندر یہ لامتناہی نقاط واقع نہ ہو۔

اُس نقطہ کو جس کو ایک ایسے دائرہ کا مرکز بنایا جا سکے جس کے اندر کوئی نادریت نہیں ہے، **سادہ نقطہ** کہتے ہیں۔ اگر دائرہ کا نصف قطر اُس فاصلہ کے مساوی ہو جو مرکز اور قریب ترین نادریت کے درمیان ہے تو دائرہ کا اندرونی حصہ اُس نقطہ کا **علاقہ** (Domain) کہلاتا ہے۔

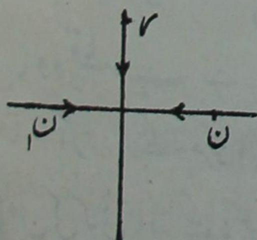
تفاعل ف (ی) کو، جس کے نادر نقطے مستوی کے محدود حصہ میں صرف قطب ہوں تو اس کو **جزوی طور پر تحلیلی** (Meromorphic) **تفاعل** کہتے ہیں۔

خاص نادریتیں (Essential singularities)

اگر ن کی ایسی کوئی قیمت معلوم نہ ہو سکے جس کے لیے $\lim\limits_{ی \to ی_1} (ی - ی_1)^{ن}$ ف(ی) = ج،

تو $ی_1$ کو ف (ی) کی **خاص نادریت** کہتے ہیں۔

مثال (۶) تفاعل $و^{\frac{1}{ی}}$ کی ی = صفر پر خاص نادریت ہے۔



شکل (۸)

تفاعل $و^{\frac{1}{ی}}$ کسی خطہ کے اندر تحلیلی ہے جس میں مبداء شامل نہیں ہے۔

اگر ن {شکل (۸)} سے کوئی حقیقی قیمت تعبیر ہو، تو اس کے متناظر تفاعل کی قیمت

حقیقی ہوگی اور مثبت ہوگی - اب جیسے جیسے ن، لا محور پر حرکت کرکے مبداء کے قریب آتا جاتا ہے، تفاعل و$^{\frac{1}{ی}}$ کی قیمت بے حد بڑھتی جاتی ہے - اگر ن، سے، ی کی منفی حقیقی قیمت تعبیر ہو، تو و$^{\frac{1}{ی}}$ کی قیمت جیسے جیسے ن، لا محور پر حرکت کرکے مبداء کے قریب آتا ہے بڑھتی جاتی ہے اور منفی ہوتی ہے اور اس لیے و$^{\frac{1}{ی}}$، صفر کی طرف مائل ہوتا ہے - اگر خیالی محور پر ر نقطہ خ ما ہو، تو اس کے متناظر تفاعل کی قیمت و$^{\frac{-خ}{ما}}$ ہے - ما کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے اس کا مقیاس اکائی ہے - اس سے یہ صاف ظاہر ہے کہ و$^{\frac{1}{ی}}$ کی کوئی معین انتہا نہیں ہے جبکہ ی صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اور ن کی ایسی کوئی قیمت نہیں معلوم کی جا سکتی جس کے لیے ی^{ن} × و$^{\frac{1}{ی}}$ ایک محدود انتہا کی طرف مائل ہو۔ یعنی ی = ۰ پر و$^{\frac{1}{ی}}$ کی خاص نادریت ہے۔

صفر نقطے - اگر ف (ی) = (ی - ی$_۱$)^{ن} فہ (ی) جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے، اور فہ (ی) ی$_۱$ پر تحلیلی ہے اور صفر نہیں ہے تو ی$_۱$ کو ف (ی) کا ن ویں رتبہ کا **صفر نقطہ** کہتے ہیں۔ پہلے رتبہ کا صفر نقطہ **سادہ صفر نقطہ** بھی کہلاتا ہے۔

۲۶ - مقلوب تفاعل

اگر ھ = ف (ی)، تحلیلی ہو اس طرح کہ ھ = ھ$_۱$، ی = ی$_۱$ کے متناظر ہو، تو ی کو ھ کا تفاعل مانا جا سکتا ہے جس میں نقطہ ی$_۱$، نقطہ ھ$_۱$ کے متناظر ہے - اگر یہ تفاعل ھ مستوی کے اس خطہ کے اندر جس میں ھ$_۱$ واقع ہے یک قیمتی اور مسلسل ہوں تو چونکہ $\frac{قری}{قرھ} = \frac{1}{\frac{قرھ}{قری}}$، یہ اس خطہ کے اندر تمام نقاط کے لیے ھ$_۱$ کا تحلیلی تفاعل ہے،

سوائے اُن نقطوں کے جس کے لیے فرھ/فری = صفر، اس تفاعل کو ف (ی) کا مقلوب تفاعل کہتے ہیں۔

امثلہ نمبری (۴)

(۱) ثابت کرو کہ ۱ / (ی - ا) (ی - ب) (ی - ج) تحلیلی ہے سوائے ا، ب، ج، پر

(۲) ثابت کرو کہ ذیل کے تفاعل تحلیلی ہیں اور اُن کے مشتق معلوم کرو۔

(ا) قوما (جم لا + خ جب لا)	جواب	خ قوما (جم لا + خ جب لا)
(ب) جمز لا جم ما + خ جبز لا جب ما	"	جبز لا جم ما + خ جمز لا جب ما
(ج) جب لا جمز ما + خ جم لا جبز ما	"	جم لا جمز ما - خ جب لا جبز ما
(د) جم لا جمز ما - خ جب لا جبز ما	"	جب لا جمز ما - خ جم لا جبز ما

{اشارہ :- تحلیلی تفاعل ہیں یہ ثابت کرنے کے لیے دکھاؤ کہ ہر ایک تفاعل کوشی - ریمان مساواتوں کو پورا کرتا ہے۔ پھر تفرقی مسہ معلوم کرنے کے لیے جو چار ضابطے دیے گئے ہیں اُن میں سے کسی ایک کو استعمال کرو}

(۳) ثابت کرو کہ (لا - خ ما)، |ی|، اور دلیل ی تحلیلی تفاعل نہیں ہیں۔
[اشارہ :- ان تفاعلوں کو (لا + خ ما) کی شکل میں بیان نہیں کیا جا سکتا]

(۴) ثابت کرو کہ لوک ی اور ممز ی، ی کے تحلیلی تفاعل ہیں۔

(۵) اگر ن حقیقی ہے تو ثابت کرو کہ رن (جم ن طہ + خ جب ن طہ) تحلیلی ہے سوائے ر = صفر کے اور اِس کا مشتق ہے ن رن-۱ [جم (ن-۱) طہ + خ جب (ن-۱) طہ]

(۶) ی کی کن قیمتوں کے لیے حسب ذیل تفاعل تحلیلی نہیں ہیں۔

(ا) ی = قوو (جم ع + خ جب ع)	جواب	ی = ۰
(ب) ی = جبز ع جم و + خ جمز ع جب و	"	ی = ± خ

(ج) ی = جب ع جمز و + خ جم ع جبز و — جواب ی = ± ۱

(د) ی = $\text{و}^{\text{ع}}$ (جم و + خ جب و) — " ی = صفر

(ع) ی = لوک ک + خ فہ جہاں ھ = ک (جم فہ + خ جب فہ) — " کوئی قیمت نہیں ہے

[اشارہ :- ی کے دیے ہوئے تفاعل کو ھ کی رقوم میں بیان کرو۔ $\frac{\text{فری}}{\text{فرھ}}$ معلوم کرو۔ اور ی کی جس قیمت کے لیے $\frac{\text{فری}}{\text{فرھ}}$ = صفر، اُس قیمت پر ھ کا دیا ہوا تفاعل تحلیلی نہیں ہے]

مثلاً (ا) ہے ی = $\text{و}^{-\text{و}}$ (جم ع + خ جب ع)

$= \text{و}^{-\text{و}} \times \text{و}^{\text{خ ع}} = \text{و}^{\text{خ ع} - \text{و}} = \text{و}^{\text{خ (ع + خ و)}}$

ی = $\text{و}^{\text{خ ھ}}$

اس لیے $\frac{\text{فری}}{\text{فرھ}}$ = خ $\text{و}^{\text{خ ھ}}$

اب $\text{و}^{\text{خ ھ}}$ = صفر تو اس نقطہ پر تفاعل تحلیلی نہیں ہے۔

یعنی ی = $\text{و}^{\text{خ ھ}}$ = صفر یعنی ی = ∞ پر یہ تحلیلی نہیں ہے۔

(۷) اگر فہ اور سہ، لا اور ما کے ایسے تفاعل ہوں جو لاپلاس کی مساوات کو پورا کرتے ہیں، تو ثابت کرو کہ (س + خ ت) تحلیلی تفاعل ہے

جہاں س = $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} - \frac{\text{جف سہ}}{\text{جف لا}}$ اور ت = $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف سہ}}{\text{جف ما}}$

(۸) ف (ی) معلوم کرو جبکہ

(۱) ع = $\text{و}^{\text{لا}}$ (لا جم ما - ما جب ما)

(۲) ع = $\text{لا}^{3} - 3\,\text{لا ما}^{2}$

(۳) و = $\frac{\text{ما}}{(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2})}$

(۴) ع = ا لا^{2} + ۲ ب لا ما - ا ما^{2}

(۵) ع = $\dfrac{\text{لا ما}}{(\text{لا}^4 + \text{ما}^4)}$

(۶) ع = جب لا جمز ما + ۲ جم لا جبز ما + لا^2 − ما^2 + ۴ لا ما

(۹) اگر ع اور و مزدوج تفاعل ہوں تو ثابت کرو کہ حسبِ ذیل تفاعل بھی مزدوج ہیں۔

(i) ا ع − ب و اور ا ع + ب و جہاں ا اور ب حقیقی مستقل ہیں۔

(ii) $\dfrac{\text{ع}}{(\text{ع}^2 + \text{و}^2)}$ اور $\dfrac{-\text{و}}{(\text{ع}^2 + \text{و}^2)}$

(۱۰) اگر (ع + خ و) = لوک (ی − ا) − لوک (ی + ا)، تو ثابت کرو کہ منحنی ع = مستقل اور و = مستقل دو علی القوائم دائروں کے نظام ہیں۔

(۱۱) اگر ی = مس ص، تو ثابت کرو کہ

لا (جم ۲ ع + جمز ۲ و) = جب ۲ ع

اور ما (جم ۲ ع + جمز ۲ و) = جبز ۲ و

اس سے ثابت کرو کہ اگر ع مستقل ہو اور و بدلے تو، 'ی'، آرگینڈ کی شکل میں، دائرہ لا^2 + ما^2 + ۲ لا مم ۲ ع = ۱' مرتسم کرتا ہے۔

(۱۲) اگر ی = جب ع جمز و + خ جم ع جبز و، تو شکل میں علی القوائم نظام ع = مستقل اور و = مستقل کو دکھاؤ۔ ثابت کرو کہ پہلا نظام ہم ماسکہ زائدوں اور دوسرا نظام ہم ماسکہ ناقصوں پر مشتمل ہے۔

(۱۳) ف (ی) معلوم کرو۔

اگر ع − و = $\dfrac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{جم لا} + \text{جب لا}}{\text{جمز ما} - \text{جم لا}}$ اور ف $\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{(3 - \text{خ})}{2}$

جواب مم $\left(\dfrac{\text{ی}}{2}\right) + \dfrac{1 - \text{خ}}{2}$

(۱۴) ثابت کرو کہ قط ی، مم ی، مس ی اور مم ی، مستوی کے محدود حصہ میں جزوی طور پر تحلیلی تفاعل ہیں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ لامتناہی $\frac{(\text{ا ی}^{2} + \text{ب ی} + \text{ج})}{\text{ل ی}^{3} + \text{م ی}^{2} + \text{ن ی} + \text{ع}}$ کا سادہ صفر ہے ۔

(۱۶) قطب، جداگانہ نادریت کا نقطہ ہے ۔

(۱۷) کسی خِطہ کے اندر لامتناہی جداگانہ نادریتیں نہیں ہو سکتی ۔

(۱۸) اگر ی = ج مسز (π ھ) تو ثابت کرو کہ خطوط λ = λ۰، ہم محور دائروں

{لا − ج ممز (۲ π λ۰)}^{2} + ما^{2} = ج^{2} قطز^{2} (۲ π λ۰) کے متناظر ہیں ۔

اور خطوط و = و۰، ہم محور دائروں کے علی القوام نظام ہیں ۔

(۱۹) اگر λ = (لا − ۱)^{3} − ۳ لا ما^{2} + ۳ ما^{2}، تو و کی قیمت معلوم کرو اور اس سے ھ کی قیمت معلوم کرو ۔

جواب و = ۳ ما (لا − ۱)^{2} − ما^{3}، ھ = (ی − ۱)^{3}

(۲۰) اگر و = ۲ ما (لا + ۱)، تو اس کے متناظر λ کی قیمت معلوم کرو ۔

(۲۱) اگر λ = قو$^{-\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2}}$ جم ۲ لا ما تو و کی قیمت معلوم کرو ۔

باب پنجم

مساواتوں کی اصلیں کثیر قیمتی تفاعلوں کی شاخیں اور شاخ نقطے ریمان کی سطح

۲۷۔ مساواتوں کا نظریہ ـــــ اگر

$$ف(ی) \equiv ا_۰ ی^{ن} + ا_۱ ی^{ن-۱} + ا_۲ ی^{ن-۲} + \cdots\cdots + ا_ن$$

جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے، اور سر $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$ ...... ، $ا_ن$ حقیقی یا ملتف اعداد ہیں جو ی پر منحصر نہیں ہیں تو ف (ی) کو ی کا کثیر الارقام جملہ اور مساوات ف (ی) = صفر کو ن ویں درجہ کی جبری مساوات کہتے ہیں۔ ی کی کوئی قیمت جو اس مساوات کو پورا کرتی ہے مساوات کی اصل کہلاتی ہے یا ی کی اس قیمت کو کثیر الارقام ف (ی) کا صفر کہتے ہیں۔ جبر و مقابلہ کے اساسی مسئلہ کی رو سے (جس کو یہاں ثابت نہیں کیا جائیگا) ہر ایسی مساوات کی کم سے کم ایک حقیقی یا ملتف اصل ہوتی ہے۔ اگر ہم اس مسئلہ کو تسلیم کریں تو یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ ہر ن ویں درجہ کی مساوات کی ن اور صرف ن اصلیں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{عہ}_{۱}$ کے لیے ف (ی) معدوم ہوجاتا ہے، جہاں $\text{عہ}_{۱}$ حقیقی یا مختلف ہے تو ابتدائی جبر و مقابلہ کے مسئلہ باقی سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ $(\text{ی} - \text{عہ}_{۱})$، ف (ی) کا جزو ضربی ہے - اور ہم لکھ سکتے ہیں -

$$\text{ف}(\text{ی}) \equiv (\text{ی} - \text{عہ}_{۱})\ \text{فا}(\text{ی})$$

جہاں فا (ی)، (ن - ۱) ویں درجہ کا کثیر الارقام جملہ ہے اور یہ خود ی کی کسی قیمت کے لیے مثلاً $\text{عہ}_{۲}$ کے لیے صفر ہوجاتا ہے - جس کا دوسرا جز ضربی (ن - ۲) ویں درجہ کا کثیر الارقام جملہ ہوگا - اسی عمل کو جاری رکھنے سے، ہم لکھ سکتے ہیں -

$$\text{ف}(\text{ی}) \equiv \text{ا}_{۰}(\text{ی} - \text{عہ}_{۱})(\text{ی} - \text{عہ}_{۲})(\text{ی} - \text{عہ}_{۳}) \cdots\cdots (\text{ی} - \text{عہ}_{\text{ن}})$$

اب یہ صاف ظاہر ہے کہ ف (ی)، معدوم ہوجاتا ہے جب ی، $\text{عہ}_{۱}$، $\text{عہ}_{۲}$ .... $\text{عہ}_{\text{ن}}$ میں سے کوئی قیمت اختیار کرے پس اوپر کا مسئلہ ثابت ہوا -

اگر ہم اوپر کے کثیر الارقام جملہ کے اجزائے ضربی کو ضرب دیکر حاصل ضرب لکھیں تو ہم کو ذیل کی مساوات متماثلہ ملجاتی ہے -

$$\text{ا}_{۰}\text{ی}^{\text{ن}} + \text{ا}_{۱}\text{ی}^{\text{ن}-۱} + \text{ا}_{۲}\text{ی}^{\text{ن}-۲} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}$$
$$\equiv \text{ا}_{۰}\Big[\text{ی}^{\text{ن}} - \text{ف}_{۱}\text{ی}^{\text{ن}-۱} + \text{ف}_{۲}\text{ی}^{\text{ن}-۲} - \cdots\cdots + (-۱)^{\text{م}}\,\text{ف}_{\text{م}}\,\text{ی}^{\text{ن}-\text{م}} + \cdots\cdots + (-۱)^{\text{ن}}\,\text{ف}_{\text{ن}}\Big]$$

جہاں ن اصلوں $\text{عہ}_{۱}$، $\text{عہ}_{۲}$، $\text{عہ}_{۳}$ .... $\text{عہ}_{\text{ن}}$ سے م، م اصلوں کے حاصل ضرب کے مجموعہ کو $\text{ف}_{\text{م}}$ تعبیر کرتا ہے -

سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{ف}_{۱} = \frac{-\text{ا}_{۱}}{\text{ا}_{۰}}،\quad \text{ف}_{۲} = \frac{\text{ا}_{۲}}{\text{ا}_{۰}}،\ \cdots\cdots\ \text{ف}_{\text{م}} = \frac{(-۱)^{\text{م}}\,\text{ا}_{\text{م}}}{\text{ا}_{۰}}،\ \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\ \text{ف}_{\text{ن}} = \frac{(-۱)^{\text{ن}}\,\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{۰}}$$

یہ ضروری نہیں ہے کہ مساواتوں کی اصلیں عہ۱، عہ۲، عہ۳ .... عہن ایک دوسرے سے مختلف ہوں اگر ان میں سے م اصلیں عہ۱ کے مساوی ہوں اور بقیہ عہ۱ سے مختلف ہوں تو

ف (ی) ≡ ا . (ی - عہ۱)^م فہ (ی)

جہاں فہ (ی)، (ن - م) درجہ کا کثیر الارتکام جملہ ہے، جو ی = عہ۱ درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا ۔ ی کے لحاظ سے تفرق کرنے سے اور تفرقی سروں کو زبروں سے تعبیر کرنے سے

ف َ (ی) ≡ ا . (ی - عہ۱)^(م-۱) [م فہ (ی) + (ی - عہ۱) فہ َ (ی)]

اب اِس مساوات کے بائیں جانب کے بڑی قوس کے اندر کا جملہ ی = عہ۱ درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا ۔ اِس سے حاصل ہوتا ہے

ف َ (ی) کا ایک جزو ضربی (ی - عہ۱)^(م-۱) ہے ۔ اِس لیے اگر ف (ی) کی عہ۱، م دفعہ تکرار پانے والی اصل ہو تو، عہ۱، ف َ (ی) کی (م - ۱) دفعہ تکرار پانے والی اصل ہوگی ۔

اگر ف (ی) = . کی کوئی نہ تکرار پانے والی اصل عہ۱ ہو، تو ی = عہ۱ کے لیے ف َ (ی) ≠ صفر

اس سے ہم ایک دی ہوئی مساوات کی ضعفی اصلیں ہیں یا نہیں معلوم کرسکتے ہیں ۔ اس کے لیے ہم کو صرف ف (ی) اور ف َ (ی) کے مشترک جزو ضربی کو دیکھنا ہوگا ۔ اگر ان میں ی کا کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو تو اِس مساوات کی ضعفی اصلیں نہیں ہونگی ۔ لیکن اگر ف (ی) اور ف َ (ی) کا ایک مشترک جزو ضربی (ی - عہ۱)^(م-۱) ہو، تو ف (ی) کی م اصلیں عہ۱ کے مساوی ہوں گی ۔

مثلاً مساوات یⁿ - ج = صفر کی جہاں ج مستقل ہے جو صفر کے

مساوی نہیں ہے، ن اصلیں مختلف ہیں - کیونکہ ن یⁿ⁻¹ = صفر کی تمام اصلیں ی = صفر ہیں جو دی ہوی مساوات کو پورا نہیں کرتی -

اگر مساوات ف (ی) = صفر کے سر حقیقی ہوں تو ملتف اصلیں مزدوج جوڑوں میں واقع ہوتی ہیں -

۲۸ - تفاعلوں کی ہندسی تعبیر

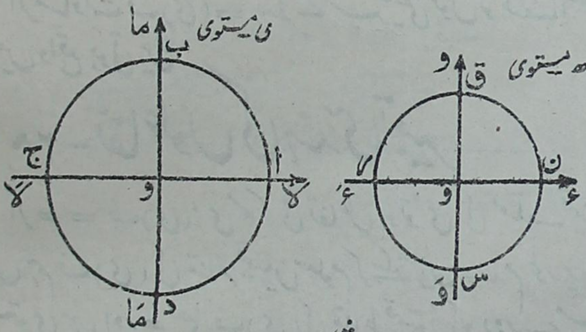
اگر ھ = ف (ی)، ی کا کوئی تفاعل ہو تو ی کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ہم ف (ی) کی متناظر قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں - عام طور پر ی کی قیمتوں کو ایک مستوی میں اور ھ یعنی ف (ی) کی متناظر قیمتوں کو دوسرے مستوی میں تعبیر کرتے ہیں - جس مستوی میں ی کی قیمتیں درج کیجاتی ہیں **ی - مستوی** کہلاتا ہے - اور جس میں ھ کی قیمتیں درج کی جاتی ہیں **ھ - مستوی** کہلاتا ہے -

ی مستوی میں حوالہ کے قائم محور لا و لا اور ما و ما ہوتے ہیں - ھ مستوی میں حوالہ کے محور ع و ع اور و و و ہوتے ہیں - لا محور ی مستوی کا **حقیقی محور** اور ما محور **خیالی محور** کہلاتا ہے - اِس کے متناظر ھ مستوی میں ع محور **حقیقی محور** کہلاتا ہے اور و محور **خیالی محور** کہلاتا ہے -

اگر ھ = ف (ی)، یک قیمتی تفاعل ہو ی کا اور اگر ی، ی - مستوی میں مختلف راستوں سے ا سے ب تک حرکت کرے تو ھ، ھ - مستوی میں مختلف راستوں سے ف (ا) سے ف (ب) تک حرکت کرے گا - کثیر قیمتی تفاعلوں کی صورت میں ھ مستوی میں حاصل شدہ آخری نقطہ، ھ کی ابتدائی منتخب شدہ قیمت اور ی کے ی مستوی میں طے کردہ راستے پر منحصر ہوتا ہے -

مثال (۱) فرض کرو کہ ھ = ی^۲، تب ع = لا^۲ - ما^۲ اور و = ۲ لا ما

اب اگر لا = صفر تو ۶ = ـــ ما۲ اور و = صفر



شکل (۹)

اِس لیے جیسے جیسے ی، ما محور پر ـ ∞ سے صفر تک حرکت کرتا ہے ۶، ـ ∞ سے صفر تک بڑھتا ہے اور اِس لیے ھ، ۶ محور پر ـ ∞ سے صفر تک حرکت کرتا ہے۔ نیز، جب ی، ما محور پر صفر سے + ∞ تک حرکت کرتا ہے تو ۶، صفر سے ـ ∞ تک گھٹتا ہے اور اس لیے ھ، ۶ محور پر صفر سے ـ ∞ تک پھر واپس حرکت کرتا ہے۔

اِس طرح سے یہ بھی بتایا جاسکتا ہے کہ جیسے جیسے ی، لا محور پر ـ ∞ سے + ∞ تک حرکت کرتا ہے، ھ، ۶ محور پر + ∞ سے صفر تک اور پھر واپس صفر سے + ∞ تک حرکت کرتا ہے۔ اِس طرح سے و محور کے مثبت اور منفی حصے بالترتیب خطوں ما = لا اور ما = ـ لا کے تناظر ہیں۔

اگر ہم پھر ی = ر (جم طہ + خ جب طہ) اور ھ = ک (جم فہ + خ جب فہ) لکھیں تو ملتا ہے ک = ر۲ اور فہ = ۲ طہ

پس اگر ی، نصف قطر ا والے دائرہ ا ب ج د (شکل ۹) پر واقع ہو تو ھ نصف قطر ا۲ والے دائرہ ن ق ر س پر ہوگا۔ فرض کرو کہ ابتدائً طہ = ۰، تو فہ = ۰. تب ا اور ن، ی اور ھ کے ابتدائی مقامات پر ہونگے۔ اب جیسے جیسے ی، ربع ا ب کے گرد مخالف سمت ساعت میں

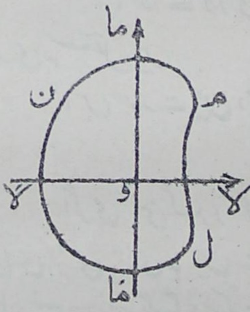
گھومتا ہے، تو طہ اور فہ، بالترتیب $\frac{\pi}{2}$ اور π تک بڑھ جاتے ہیں اور ھ نصف دائرہ ن ق ما کے گرد حرکت کرتا ہے۔ اسی طرح سے یہ بھی دکھایا جاسکتا ہے کہ جیسے جیسے ی، ربعوں ب ج، ج د اور د ا کے گرد حرکت کرتا ہے، ھ نصف دائروں ما س ن، ن ق ما اور ما س ن پر حرکت کرتا ہے۔ اس طرح جب ی، دائرہ ا ب ج د ایک دفعہ مرتسم کرتا ہے تو ھ، دائرہ ن ق ما س کو دو دفعہ مرتسم کرتا ہے۔

اطلاقات میں اکثر یہ ضروری ہوتا ہے کہ جب ی ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے تو ھ کی دلیل میں تبدیلی پر غور کیا جائے اب ہم بعض خاص صورتوں پر غور کرینگے۔

(۱) ھ = ی

اس صورت میں دلیل ھ = دلیل ی

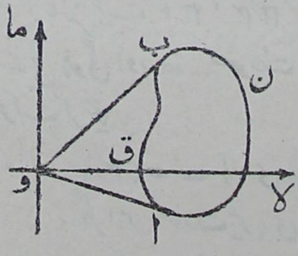
فرض کرو کہ ی مبداء کے گرد بند منحنی ل ھ ن (شکل ۱۰) مرتسم کرتا ہے۔ تب اگر ی، ل ھ ن کے گرد ایک دفعہ مثبت سمت میں حرکت کرے تو دلیل ی، نیز دلیل ھ میں ۲ π کا اضافہ ہوگا۔ اسی طرح سے



شکل (۱۰)

اگر ی، منحنی کے گرد ایک بار منفی سمت میں حرکت کرے تو دلیل ی اور دلیل ھ دونوں میں ۲ π کی کمی ہوگی۔ عام طور پر مثبت یا منفی سمتوں میں ن چکر دلیلوں کو + ۲ ن π یا - ۲ ن π میں بدل دینگے۔

اس کے برخلاف اگر ی سے مرتسم شدہ بند منحنی ا ن ب ق کے باہر مبداء ہو (شکل ۱۱) تو ی اور ھ کی دلیلیں ا پر ہ و ا سے ب پر ہ و ب تک بڑھیں گی اور پھر ہ و ب سے ہ و ا تک گھٹیں گی۔ یعنے مجموعی تبدیلی صفر کے مساوی ہے۔



شکل (۱۱)

(۲) ھ = ا (ی - ی۱) جہاں ا اور ی۱ مستقل ہیں - اِس صورت میں

دلیل ھ = دلیل ا + دلیل (ی - ی۱)

چونکہ دلیل ا مستقل ہے اِس لیے دلیل ھ میں تبدیلی دلیل (ی - ی۱) میں تبدیلی کے مساوی ہے - اِس لیے اگر ی، ی۱ کے گرد مثبت یا منفی سمت میں ایک بند منحنی مرتسم کرے تو دلیل ھ میں + ۲ π یا - ۲ π کی تبدیلی ہوگی لیکن اگر ی۱ منحنی کے باہر کوئی نقطہ ہو تو دلیل ھ اپنی ابتدائی قیمت اختیار کرے گی، پہلی صورت میں ھ، ھ مستوی میں مبداء کے گرد ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے۔ لیکن دوسری صورت میں وہ بند منحنی مرتسم کریگا جس میں مبداء شامل نہیں ہے -

(۳) ھ = ا (ی - ی۱) (ی - ی۲) (ی - ی۳) جہاں ا، ی۱، ی۲ اور ی۳ مستقل ہیں -

اس صورت میں دلیل ھ = دلیل ا + دلیل (ی - ی۱)
+ دلیل (ی - ی۲) + دلیل (ی - ی۳)

اگر ی منحنی گ (شکل ۱۲) جس میں ی۱، ی۲، ی۳ میں سے کوئی نقطہ شامل نہیں ہے کے گرد حرکت کرے تو دلیل ھ اپنی ابتدائی قیمت اختیار کریگی یعنے ھ ایک بند منحنی مرتسم کریگا جس میں مبداء شامل نہیں ہے - اگر ی گ۱، گ۲ یا گ۳ کے گرد حرکت کرے تو دلیل ھ میں بالترتیب ۲ π، ۴ π، یا ۶ π کی تبدیلی ہوگی اور ھ، بصورت موافق مبداء کے گرد ایک دفعہ، دو دفعہ، یا تین دفعہ حرکت کریگا۔

شکل (۱۲)

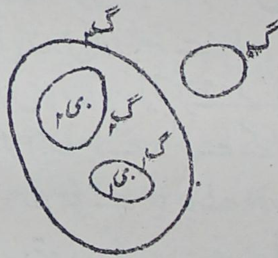
(۴) ھ = ا (ی - ی۱) (ی - ی۲) .... (ی - ی ن) -

اگر اس صورت میں ی، ایک ایسا بند منحنی مرتسم کرے جس میں ی۱، ی۲ ..... ی ن میں سے کوئی نقطہ واقع نہ ہو تو صورت ۲ اور ۳ کی طرح حاصل ہوتا ہے کہ

دلیل ھ اپنی ابتدائی قیمت پر واپس آتی ہے - اور ھ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے جس میں مبداء نہیں ہے - لیکن اگر ی ایک ایسا بند منحنی مرتسم کرے جس میں اِن میں سے ر نقاط واقع ہوں تو دلیل ھ میں ۲ ر π کا اضافہ ہوگا اور ھ مبداء کے گرد ر دفعہ حرکت کریگا یا چکر لگائیگا۔

$$\text{ھ} = \text{ا} \frac{(\text{ی} - \text{ی}_1)}{(\text{ی} - \text{ی}_2)} \quad (۵)$$

اِس صورت میں دلیل ھ = دلیل ا + دلیل (ی - ی₁) - دلیل (ی - ی₂)
اِس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر ی ایک بند منحنی گ₁ (شکل ۱۳) یا گ₂



شکل (۱۳)

مرتسم کرے تو دلیل ھ میں ۲ π کا اضافہ یا کمی ہوگی، لیکن اگر ی گ₃ اور گ₄ میں سے کوئی منحنی مرتسم کرے تو دلیل ھ اپنی ابتدائی قیمت اختیار کریگی۔
اِن تمام صورتوں سے یہ صاف ظاہر ہے کہ کسی بند منحنی کے مرتسم ہونے سے دلیل ھ میں تبدیلی منحنی کے شکل پر منحصر نہیں ہے حتیٰ کہ نقطوں ی₁، ی₂، ی₃ ..... کے وہی جٹ اُس کے اندر ہیں یا باہر - یہ عام طور پر سہولت دہ ہوتا ہے کہ منحنی ایک دائرہ کی شکل میں لیا جائے۔

۲۹ - مساواتوں کی اصلیں

اب ہم مساوات

$$ف(ی) = ا_{۰}\, ی^{ن} + ا_{۱}\, ی^{ن-۱} + ا_{۲}\, ی^{ن-۲} + \cdots\cdots + ا_{ن}$$

کی حقیقی اور ملتف اصلیں جو ی مستوی کے مختلف خطوں میں واقع ہیں معلوم کرتے ہیں۔

اوپر ہم نے دیکھا ہے کہ اِس مساوات کو شکل

$ا_{۰}(ی - ی_{۱})(ی - ی_{۲}) \cdots\cdots (ی - ی_{ن})$ میں لکھ سکتے ہیں۔

اگر ی کو ی مستوی کے اندر مثبت سمت میں ایک ایسے بند گھیرے کے گرد جو $ی_{۱}$، $ی_{۲}$ .... $ی_{ن}$ میں سے ر نقاط کو گھیرتا ہے لیں، تو ف (ی) کی دلیل میں ۲ ر π کا اضافہ ہوتا ہے۔ اِس لیے ایک دیے ہوئے گھیرے کے اندر ف (ی) = صفر کے اصلوں کی تعداد، اُس گھیرے کے گرد ی کی حرکت کی وجہ سے دلیل ف (ی) کی تبدیلی کو دیکھنے سے معلوم ہو سکتی ہے۔

ذیل کا مسئلہ اصلوں کا مقام معلوم کرنے کے لیے مفید ثابت ہوگا۔

مسئلہ۔ اگر ی کو ایک بڑے دائرے کے کسی حصہ کے گرد جس کا مرکز مبداء ہے اور نصف قطر ر ہے لیا جائے اور اگر دلیل ی میں تبدیلی ط ہو تو ف (ی) کی دلیل میں تبدیلی مائل بہ ن ط ہو گی جبکہ ر مائل بہ لامتناہی ہوتا ہے۔

کیونکہ $ف(ی) = ی^{ن}\left(ا_{۰} + \frac{ا_{۱}}{ی} + \frac{ا_{۲}}{ی^{۲}} + + \cdots\cdots + \frac{ا_{ن}}{ی^{ن}}\right)$

اسلیے $دلیل\ ف(ی) = ن\ دلیل\ ی + دلیل\left(ا_{۰} + \frac{ا_{۱}}{ی} + \frac{ا_{۲}}{ی^{۲}} + \cdots\cdots + \frac{ا_{ن}}{ی^{ن}}\right)$

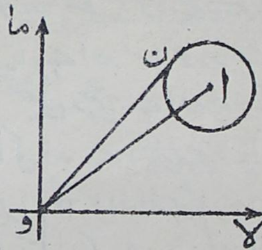
اب $\left|\frac{ا_{۱}}{ی} + \frac{ا_{۲}}{ی^{۲}} + \frac{ا_{۳}}{ی^{۳}} + \cdots\cdots + \frac{ا_{ن}}{ی^{ن}}\right| \leqq ک$

جہاں $ک = \frac{|ا_{۱}|}{ر} + \frac{|ا_{۲}|}{ر^{۲}} + \cdots\cdots + \frac{|ا_{ن}|}{ر^{ن}}$

فرض کرو کہ ر کو ہم اتنا بڑا منتخب کرتے ہیں کہ

$ک < |ا_{۰}|$. تب نقطہ $ا_{۰} + \frac{ا_{۱}}{ی} + \cdots\cdots + \frac{ا_{ن}}{ی^{ن}}$ کو اُس دائرہ کے

اندر واقع ہونا چاہیے جس کا مرکز ا یا ا (شکل ۱۴) ہو اور نصف قطر ک ہے۔ اگر



شکل (۱۴)

و ن اس دائرہ کا مماس ہو تو دلیل (ا. + ا۱/ی + ا۲/ی + ... + ان/ین) اور دلیل ا. کا فرق ایک ایسے زاویہ لہ کے مساوی ہوتا ہے جو زاویہ ا و ن سے بڑا نہیں ہے اور جس کو ر کو بڑھانے سے یعنے ک کو گھٹانے سے جتنا چاہے چھوٹا کیا جا سکتا ہے۔

یعنے دلیل ف(ی) = ن × دلیل ی ≠ دلیل ا. ≠ لہ

اس لیے نہا ر→∞ دلیل ف(ی) = ن × دلیل ی + دلیل ا.

اس لیے جب ر مائل بہ لامتناہی ہو تو دلیل ف(ی) میں تبدیلی، دلیل ی میں تبدیلی کے ن گنا کی طرف مائل ہوتی ہے۔

مثال (۲) مساوات ی۴ + ی۳ + ۱ = صفر کے اصلوں کے مقام کی تحقیق کرو۔

فرض کرو کہ ∞ = ی۴ + ی۳ + ۱، اور فرض کرو کہ ی ذیل کے تین حصّوں والا گھیرا مرتسم کرتا ہے

(۱) لا محور صفر سے + ∞ تک

(۲) مرکز و اور نصف قطر لامتناہی والے دائرہ کا پہلا ربع

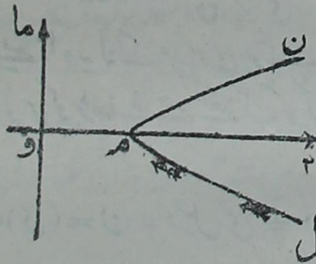
(۳) ما محور + ∞ سے صفر تک

(۱) لا محور پر کے نقاط کے لیے ھ = ع + خ و = لا^۴ + لا^۳ + ۱، جس سے ع = لا^۴ + لا^۳ + ۱، اور و = صفر، اس لیے جیسے جیسے ی، لا محور پر صفر سے + ∞ تک حرکت کرتا ہے، ھ، ع محور پر ۱ سے + ∞ تک حرکت کرتا ہے۔ اس لیے دلیل ھ مستقل رہتی ہے اور صفر کے مساوی ہے۔

(۲) بڑے دائرہ کی وجہ سے دلیل میں $\frac{\pi}{2}$ کا اضافہ ہوتا ہے، اس لیے اُوپر کے مسئلہ سے دلیل ھ میں ۲π کا اضافہ ہوتا ہے۔

(۳) ما محور پر کے نقاط کے لیے ع = (ما^۴ + ۱) اور و = - ما^۳

اس لیے ھ، اِن مساواتوں سے حاصل شدہ لامتناہی منحنی ل ھ ن (شکل ۱۵) پر واقع ہوتا ہے اور جیسے جیسے ما، + ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے،



شکل (۱۵)

ھ اس منحنی پر ع محور کے نیچے لامتناہی سے نقطہ ھ (ھ = ۱) تک نشان کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔ اِس لیے دلیل ھ کی ابتدائی اور آخری قیمتیں دونوں صفر کے مساوی ہیں۔

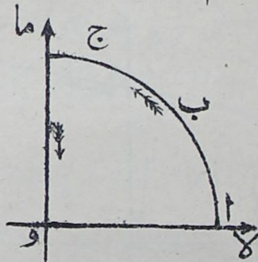
اِس لیے ی کے اس گھیرے کے گرد چکر لگانے سے دلیل ھ میں ۲π کی تبدیلی ہوتی ہے جس سے حاصل ہوتا ہے کہ پہلے ربع میں اس مساوات کی ایک اور صرف ایک اصل واقع ہے۔

اِسی طرح سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ دوسرے ربعوں میں سے ہر ایک میں اِس مساوات کی صرف ایک اصل واقع ہے۔

پھر فرض کرو کہ ی گھیرا و ا ب ج (شکل ۱۶) مرتسم کرتا ہے۔

جہاں ا اور ج نقاط ۱ اور خ ہیں اور ا ب ج دائرہ |ی| = ۱ کا ایک ربع ہے ۔

تب اولاً و ا کے مرتسم ہونے سے دلیل ھ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ۔



شکل (۱۶)

اب مرکز و اور نصف قطر ر والے دائرہ پر کے نقاط کے لیے ۔

$$\text{ی} = \text{ر}\,(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}) = \text{ر}\,\frac{(1 - \text{ت}^2 + 2\,\text{خ ت})}{1 + \text{ت}^2}$$

$$\text{جہاں ت} = \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

$$= \text{ر}\,\frac{(1 + \text{خ ت})}{1 - \text{خ ت}}$$

$$\text{اب ج پر کے نقاط کیلیے ی} = \frac{(1 + \text{خ ت})}{1 - \text{خ ت}}$$

$$\text{جس سے ھ} = \frac{3 - 12\,\text{ت}^2 + \text{ت}^4 + 2\,\text{خ ت} + 2\,\text{خ ت}^3}{(1 - \text{خ ت})^4}$$

$$\text{اس لیے دلیل ھ} = \text{دلیل}\left\{(3 - 12\,\text{ت}^2 + \text{ت}^4) + \text{خ}\,(2\,\text{ت} + 2\,\text{ت}^3)\right\} - \text{دلیل}\,(1 - \text{خ ت})^4$$

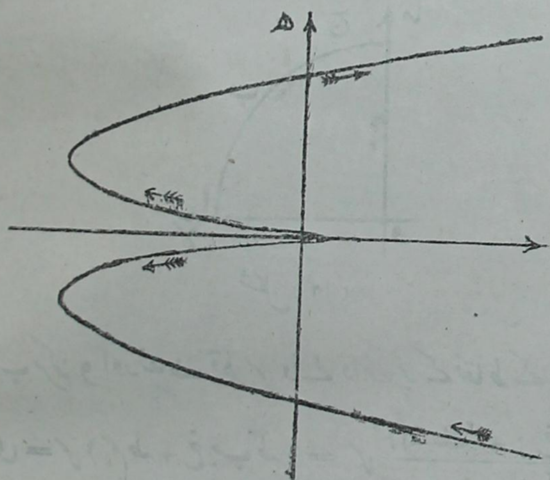
اب جب طہ، صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک بدلتا ہے تو ت صفر سے ۱+ تک بدلتا ہے،

یعنے دلیل (۱ − خ ت)، $\frac{\pi}{4}$ تک گھٹتی ہے۔ اِس لیے دلیل $(1 - \text{خ ت})^4$، π تک

گھٹتی ہے۔

پھر فرض کرو کہ صا = ۳ - ۲ات^{۲} + ت^{۴} اور عا = ۲ت + ۲ت^{۳}

تب اِن مساواتوں سے حاصل شدہ منحنی (شکل ۱۷) کی طرح کا ہے۔



شکل (۱۷)

نشان کی سمت نقطہ (صا، عا) کا تغیر جیسے ت – ∞ سے + ∞ تک حرکت کرتا ہے، بتلاتی ہے۔

اب جب ت = صفر، تو صا = ۳ اور عا = صفر تب دلیل (صا + خ عا) = صفر، نیز جب ت = ۱، تو صا = – ۸ اور عا = ۴، اس لیے دلیل (صا + خ عا) = طہ جہاں طہ دوسرے ربع کا وہ زاویہ ہے جس کے لیے مس طہ = – $\frac{۱}{۲}$ اس لیے ی کے ربع اب ج مرتسم کرنے سے دلیل ھ میں تبدیلی مساوی ہے۔

$$\text{π} + \text{طہ} = ۲\text{π} - \text{مس}^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

آخر کار وج پر کے نقاط کے لیے ی = (ما^{۴} + ۱)، اور و = – ما^{۳}

اس لیے منحنی ل مرن پر ہوتا ہے (شکل ۱۵)

جب ما = ۱، تو نقطہ ک [ص = ۲ - خ] پر ہوتا ہے اور

دلیل ص = - مس^{-۱} (۱/۲)

لیکن جب ما = صفر تو ص نقطہ ھ (ص = ۱) پر ہوتا ہے اس لیے راستہ ج و کے مرتسم ہونے سے دلیل میں تبدیلی (مس^{-۱} ۱/۲) ہے یعنے پورے چکر کی وجہ سے دلیل میں تبدیلی ۲π ہوتی ہے۔ اس لیے وہ اصل جو پہلے ربع میں واقع ہے اکائی نصف قطر کے دائرہ کے اندر ہے۔

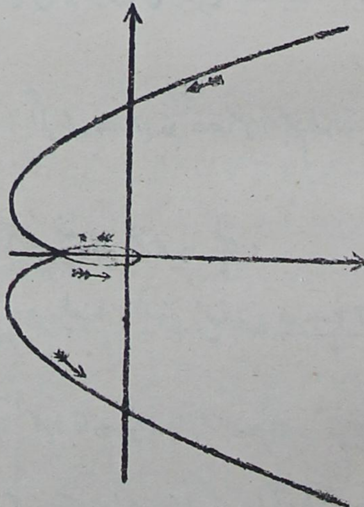
اسی طرح سے یہ بھی بتایا جا سکتا ہے کہ چوتھے ربع کی اصل اکائی نصف قطر کے دائرہ کے اندر ہے لیکن بقیہ دو اصلیں اس کے باہر ہیں۔

پھر یہ بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ بقیہ چار اصلیں دائرہ |ی| = ۲ کے اندر ہیں۔

کیونکہ اگر ی = ۲ ((۱ + خ ت)/(۱ - خ ت)) تو

ص = {(۲۵ - ۱۰۲ ت² + ۹ ت⁴) + ۴خ (۷۶ ت - ۴۴ ت³)} / (۱ - خ ت)⁴

اب منحنی صا = (۲۵ - ۱۰۲ ت² + ۹ ت⁴)، عا = (۷۶ ت - ۴۴ ت³) شکل (۱۸)



شکل (۱۸)

میں دکھائے ہوئے منحنی کی قسم کا ہے نشان کی سمت نقطہ (صا، عا) کا تغیر جیسے ت، $-\infty$ سے $+\infty$ تک حرکت کرتا ہے بتلاتی ہے۔ لیکن جیسے جیسے دلیل (ی) $-\pi$ سے $+\pi$ تک بدلتی ہے 'ت' $-\infty$ سے $+\infty$ تک بدلتا ہے۔

اور اس لیے دلیل (صا+خ عا) میں ۴ π کا اضافہ ہوتا ہے۔

نیز دلیل $\left\{\frac{1}{(1-خ ت)^4}\right\}$ کی وجہ سے ۴ π کا اضافہ ہوتا ہے۔ اس لیے دلیل ص میں جملہ ۸ π کا اضافہ ہوتا ہے۔ یعنے اس مساوات کی چاروں اصلیں دائرہ |ی| = ۲ کے اندر ہیں۔

۳۰- کثیر قیمتی تفاعل

تحلیلی تفاعل کی ہم نے تعریف کی ہے کہ یہ تفاعل یک قیمتی ہو۔ لیکن بہت سے ابتدائی تفاعل مثلاً $ی^{ع}$ (جہاں ع صحیح عدد نہیں ہے)، لوک ی، جب$^{-1}$ ی، وغیرہ کثیر قیمتی تفاعل ہیں۔ کثیر قیمتی تفاعلوں کی قیمتوں کی تشریح کے لیے آسان صورت $ص^2 = ی$ پر غور کرو۔

$ص = \sqrt{ی}$، اگر $ی = ر\, ق^{خ ط} = ر(جم ط + خ جب ط)$، تو ص کی دو قیمتیں۔

$$ص_1 = ر^{\frac{1}{2}}\left(جم\frac{ط}{2} + خ جب\frac{ط}{2}\right)$$

اور $ص_2 = ر^{\frac{1}{2}}\left(جم\frac{ط+2\pi}{2} + خ جب\frac{ط+2\pi}{2}\right)$ ہوتی ہیں۔

$$اب\ ص_2 = ر^{\frac{1}{2}}\left\{جم\left(\pi + \frac{ط}{2}\right) + خ جب\left(\pi + \frac{ط}{2}\right)\right\} = -ص_1$$

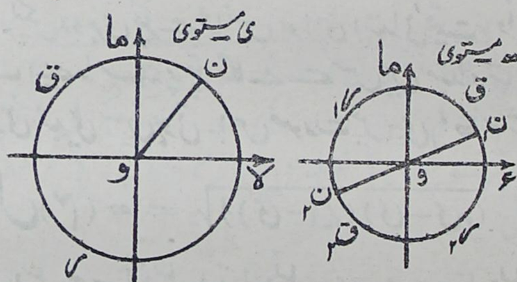
مقداروں $ص_1$ اور $ص_2$ میں سے ہر ایک ی کے ساتھ بدلتی ہے اور اس لیے ان میں سے ہر ایک ی کا ایک تفاعل ہے ان کو دو قیمتی تفاعل ص کی شاخیں

کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ی نقطہ ن (ر، طہ) [شکل (۱۹)] سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور فرض کرو کہ ھ₁ اور ھ₂ کی ابتدائی قیمتیں

$$\overline{\text{ھ}}_1 = \text{ر}^{\frac{1}{2}} \left\{ \text{جم} \left(\frac{\text{طہ}}{2}\right) + \text{خ جب} \left(\frac{\text{طہ}}{2}\right) \right\} \text{ اور } \overline{\text{ھ}}_2 = -\overline{\text{ھ}}_1 \text{ ہیں۔}$$

تب $\overline{\text{ھ}}_1$ اور $\overline{\text{ھ}}_2$، ھ مستوی میں نقاط ن₁ $\left[\text{ر}^{\frac{1}{2}}, \frac{\text{طہ}}{2}\right]$ اور ن₂ $\left[\text{ر}^{\frac{1}{2}}, \frac{\text{طہ}}{2} + \pi\right]$ سے تعبیر ہونگے۔



شکل (۱۹)

اب اگر ی، دائرہ ن ق ر، جس کا مرکز و ہے اور نصف قطر ر ہے کے گرد حرکت کرے تو طہ میں 2π کا اور دلیل ھ میں π کا اضافہ ہوتا ہے۔ نتیجہ کے طور پر، ھ مستوی میں ھ₁ نصف دائرہ ن₁ ق₁ ر₁ ن₂ کے گرد اور ھ₂ نصف دائرہ ن₂ ق₂ ر₂ ن₁ کے گرد حرکت کریگا۔ ھ₁ اور ھ₂ کی آخری قیمتیں $\overline{\text{ھ}}_2$ اور $\overline{\text{ھ}}_1$ ہونگی۔ اس لیے مبداء کے گرد ی کا ایک چکر ھ کی شاخیں بدل دیتا ہے۔ ایسے دو چکر ھ₁ اور ھ₂ کو اپنی ابتدائی قیمتوں پر لے آتے ہیں۔ ترسیمی طور پر اگر ی، دائرہ ن ق ر کے گرد دو دفعہ کرے تو ھ₁ اور ھ₂ میں سے ہر ایک دائرہ ن₁ ق₁ ن₂ ق₂ کے گرد ایک دفعہ حرکت کرتا ہے۔

اگر ی سے مرتسم شدہ راستہ میں مبداء شامل نہ ہو تو طہ، اپنی ابتدائی

قیمت ھ اور $ھ_۱$ اور $ھ_۲$ اپنی ابتدائی قیمتیں $\overline{ھ_۱}$ اور $\overline{ھ_۲}$ اختیار کرینگے۔

نقطہ **و** کو ھ کا **شاخ نقطہ** کہتے ہیں کیونکہ اِس کے گرد ایک چکر سے تفاعل کی شاخیں بدل جاتی ہیں۔

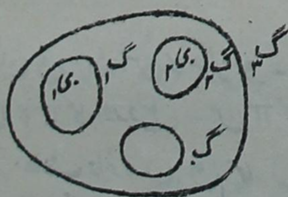
مثال (۳) $ھ = \sqrt{ا(ی - ی_۱)}$، اِس صورت میں دلیل ھ

$= \frac{۱}{۲}$ دلیل ا $+ \frac{۱}{۲}$ دلیل $(ی - ی_۱)$

یہ ایک اور دو قیمتی تفاعل ہے۔ $ی_۱$ کے گرد ایک واحد چکر سے شاخیں بدل جاتی ہیں۔ لیکن دوہری چکر سے شاخیں پھر اپنی ابتدائی قیمت پر واپس آتی ہیں۔ اِس کے برخلاف ایسے راستہ پر چکر لگانے سے جس میں مبداء شامل نہیں ہے شاخوں میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ اِس صورت میں $ی_۱$، ھ کا شاخ نقطہ ہے۔

مثال (۴) $ھ = \sqrt{ا(ی - ی_۱)(ی - ی_۲)}$

اِس صورت میں دلیل ھ $= \frac{۱}{۲}$ دلیل ا $+ \frac{۱}{۲}$ دلیل $(ی - ی_۱) + \frac{۱}{۲}$ دلیل $(ی - ی_۲)$
اِس لیے $گ_۱$ (شکل ۲۰) یا $گ_۲$ کو مرتسم کرنے سے شاخیں بدل جاتی ہیں۔



شکل (۲۰)

لیکن گ. اور $گ_۳$ کے مرتسم کرنے سے کوئی فرق نہیں آتا۔ اِس طرح $ی_۱$ اور $ی_۲$، ھ کے شاخ نقطے ہیں۔

مثال (۵) $ھ = \sqrt[ن]{ی - ا}$

اگر (ی - ا) = ر (جم طہ + خ جب طہ)، تو ھ کی ن شاخیں $ھ_1$، $ھ_2$، ...... $ھ_ن$ ہوتی ہیں۔

جہاں $ھ_س = ر^{\frac{1}{ن}} \left(جم \frac{طہ + ۲ س \pi}{ن} + خ \, جب \frac{طہ + ۲ س \pi}{ن} \right)$۔

شاخ نقطہ ا کے گرد ایک چکر لگانے سے طہ میں ۲ π کا اضافہ ہوتا ہے اور اس لیے $ھ_1$، $ھ_2$ میں، $ھ_2$، $ھ_3$ میں ...... اور $ھ_ن$، $ھ_1$ میں بدل جاتے ہیں۔ ایسے چکر جس میں ا شامل نہیں ہے، شاخوں میں کوئی تبدیلی نہیں کرتے۔

مثال (۶) فرض کرو کہ $ھ = \sqrt{(۱ - ی)(۱ + ی^2)}$ اور فرض کرو کہ جب ی، و پر ہو تو ھ کی قیمت + ۱ ہوتی ہے۔ تب اگر ی منحنی و ن ا (شکل ۲۱) مرتسم کرے جہاں ا نقطہ ۲ ہے تو ثابت کرو کہ ا پر ھ کی قیمت $-خ\sqrt{۵}$ ہوگی۔

شکل (۲۱)

ھ کے تین صفر ا، خ اور - خ ہیں۔ فرض کرو کہ ب، ج اور د متناظر نقطے ہیں۔ ج اور د میں سے و ہ کے متوازی بالترتیب ج ل اور د م کھینچو۔

فرض کرو کہ ب ن، ج ن، اور د ن کے مقیاس اور دلیلیں

بالترتیب $ر_۱$، $ر_۲$، $ر_۳$ اور فہ$_۱$، فہ$_۲$، فہ$_۳$ ہیں۔

جہاں ۷ ب ن = فہ$_۱$، ل ج ن = فہ$_۲$، م ڈ ن = فہ$_۳$

$$\text{تب } ھ = (-۱)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(ی-۱)(ی+خ)(ی-خ)}$$

$$ھ = (-۱)^{\frac{1}{2}} ر_۱^{\frac{1}{2}} ر_۲^{\frac{1}{2}} ر_۳^{\frac{1}{2}} \left(جم \frac{فہ_۱+فہ_۲+فہ_۳}{۲} + خ\, جب \frac{فہ_۱+فہ_۲+فہ_۳}{۲}\right)$$

اِس امر کا ابھی فیصلہ کرتا ہے کہ دلیل (-۱) کی دو ممکنہ قیمتوں + π اور - π میں سے کونسی منتخب کی جائے۔ اب جبکہ ی، و پر ہے تو فہ$_۱$ = π، فہ$_۲$ = $-\frac{\pi}{2}$ اور اور فہ$_۳$ = $\frac{\pi}{2}$ جس سے فہ$_۱$ + فہ$_۲$ + فہ$_۳$ = π

اِس لیے اگر دلیل (-۱) = π لی جائے تو و پر دلیل ھ = π، اِسکی بجائے اگر دلیل (-۱) = -π لی جائے تو و پر دلیل ھ = صفر لیکن دیا گیا ہے کہ جب ی و پر ہو تو ھ = +۱، اِس لیے آخری قیمت کو منتخب کرنا پڑے گا

اِس لیے

$$ھ = ر_۱^{\frac{1}{2}} ر_۲^{\frac{1}{2}} ر_۳^{\frac{1}{2}} \left\{جم \frac{فہ_۱+فہ_۲+فہ_۳-\pi}{۲} + خ\, جب \frac{فہ_۱+فہ_۲+فہ_۳-\pi}{۲}\right\}$$

اب جب 'ی' و سے ا تک حرکت کرتا ہے تو فہ$_۱$، π سے صفر تک گھٹتا ہے۔ فہ$_۲$، $-\frac{\pi}{2}$ سے مس$^{-۱}$ $\frac{۱}{۲}$ تک بڑھتا ہے اور فہ$_۳$ $\frac{\pi}{2}$ سے مس$^{-۱}$ $\frac{۱}{۲}$ تک گھٹتا ہے۔ اِس لیے ا پر دلیل ھ $(-\frac{\pi}{2})$ ہے، نیز

$$ر_۱ = ۱،\ ر_۲ = \sqrt{۵} \text{ اور } ر_۳ = \sqrt{۵}$$

$$\text{اِس لیے } ھ = \sqrt{۵}\left\{جم\left(-\frac{\pi}{2}\right) + خ\, جب\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= -غ\sqrt{۵}$$

۳۱ - ترچھی کاٹ اور ریمان کی سطح

ہم نے دیکھا ہے کہ مساوات $ھ^۲$ = ی، کا ملتف مستوی میں ایک یک قیمتی

مسلسل حل نہیں ہے بلکہ ھ^2 = ی ، ی کا دو قیمتی تفاعل ہے ۔ ھ کی دو قیمتوں

ھ$_1$ = $\sqrt{|\text{ر}|}$ و$^{\frac{1}{2}}$ خ ط اور ھ$_2$ = − $\sqrt{|\text{ر}|}$ و$^{\frac{1}{2}}$ خ ط کو ہم نے دو قیمتی

تفاعل ھ^2 = ی ، کی شاخیں کہا ہے ۔ اِن شاخوں میں سے ہر ایک کو ی مستوی میں یک قیمتی بنایا جا سکتا ہے اگر ہم ایک خط ، مبداء سے لا متناہی تک ، مثبت حقیقی محور کے ساتھ لیں جس پر سے ھ گذر نہیں سکتا اور اِس خط پر کے نچلے اور اوپر کے نقاط پر تفاعل کی قیمتوں میں تمیز کیا جائے ۔ ایسے خط کو جس پر سے ھ گزر نہیں سکتا ترچھی کاٹ (Cross-cut) کہتے ہیں ۔

اگر (شکل ۲۲) میں و ا = لا ۔ تو ا (ط = ۰) پر ھ$_1$ کی قیمت $\sqrt{|\text{لا}|}$ ہے اور ب (ط = ۲π) پر ھ$_1$ کی قیمت − $\sqrt{|\text{لا}|}$ ہے ۔ چونکہ ترچھی کاٹ لینے سے

شکل (۲۲)

ھ$_1$ یا ھ$_2$ میں سے کوئی ایک مبداء کے گرد پورا چکر نہیں کر سکتا اِس لیے اگر ہم ی کی اُس قیمت سے حرکت شروع کریں جو شاخ ھ$_1$ کی ہے ، تو ہم کبھی شاخ ھ$_2$ کی کسی قیمت پر نہ پہنچیں گے ۔

دو قیمتی تفاعل ھ^2 = ی کو ، یک قیمتی تفاعل کے طور پر بیان کرنے کے لیے ایک اور طریقہ ہے جس میں ایک سطح کھینچنی پڑتی ہے جس کو **ریمان کی سطح** کہتے ہیں ۔

اِس کے لیے ہم کو ی مستوی کی بجائے دو مستوی س$_1$ اور س$_2$ لینے ہونگے ۔ ہم س$_1$ کو ، س$_2$ کے اوپر رکھا ہوا (Superposed) سمجھ سکتے ہیں ۔ اوپر بتائے ہوئے طریقہ کی طرح اگر ہم دو مستویوں کے درمیان ایک ترچھی کاٹ لیں تو ہم یہ قرار داد اختیار کرتے ہیں کہ س$_1$ کی نچلی ترچھی کاٹ کا سرا س$_2$ کے اوپر کی ترچھی کاٹ کے سرے سے ملا ہوا ہے اور س$_2$ کی ترچھی کاٹ کا نچلا سرا ، س$_1$ کی ترچھی کاٹ کے اوپر کے سرے سے ملا ہوا ہے ۔

فرض کرو کہ ہم ی کی قیمت ی. سے جس کے جواب میں ء کی قیمت ء. ہے سطح س۱ پر حرکت کرنا شروع کرتے ہیں۔ اور فرض کرو کہ نقطہ ی نقطۂ ی. سے شروع کر کے مخالف سمت ساعت میں ایک راستہ مرتسم کرتا ہے۔ جب متغیر نقطہ سطح س۱ کی ترچھی کاٹ کے نچلے کونے پر پہنچتا ہے۔ تو یہ س۲ کی ترچھی کاٹ کے اوپر کے کونے کو عبور کرتا ہے۔ پھر یہ س۲ میں دوسرا مخالف سمت ساعت میں چکر مرتسم کرتا ہے جبتک کہ یہ اس مستوی کے نچلے کونے تک نہ پہنچ جائے۔ یہ پھر س۱ کی ترچھی کاٹ کے اوپر کے کونے کو عبور کرتا ہے اور اپنی حرکت کے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے جہاں پر اُس کی قیمت ء. ہی ہوتی ہے۔ یہ بالکل اُس طریقہ کے مماثل ہے جس سے ہم نے $\sqrt{ی}$ کی دو مختلف قیمتیں حاصل کی ہیں۔ اور اس لیے $\sqrt{ی}$، **ریمان کی سطح پر یک قیمتی تفاعل** ہے۔

تفاعلوں کی شاخوں میں تقسیم کرنے کا یگانہ طریقہ نہیں ہوتا، اس لیے ہم مستوی کو کسی ایسے خط سے کاٹ سکتے تھے جو مبداء سے + ∞ تک پھیلا ہوا ہے لیکن ی = صفر تفاعل ء = $\sqrt{ی}$ کا شاخ نقطہ ہے اس لیے مناسب یہی ہے کہ یہیں سے ترچھی کاٹ لی جائے۔

رشتہ $ء^{ن} = ی$، ی کا ن قیمتی تفاعل ہے، کیونکہ $ی^{\frac{1}{ن}}$ کی ن اور صرف ن مختلف قیمتیں ہوتی ہیں جو مساوات $ر^{\frac{1}{ن}}\left(\text{جم} \frac{طہ + ۲ک\pi}{ن} + \text{ٮخ جب} \frac{طہ + ۲ک\pi}{ن}\right)$ میں ک کی بجائے ۰، ۱، ۲ .... ن - ۱ درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔ نقطہ ی = ۰ شاخ نقطہ ہے۔ اور اِس تفاعل کے لیے ریمان کی سطح ن چادروں ف۱، ف۲ .... فن پر مشتمل ہوتی ہے۔ تفاعل ء = $\sqrt{ی - ۱}$ کا ی = ۱، شاخ نقطہ ہے۔ اور اس لیے ترچھی کاٹ ی = ۱ سے ی = + ∞ تک لی جائے۔

تفاعل ھ = لوک ی پر غور کرو۔

چونکہ ھ = لوک ر + خ (طہ + ۲ک π)، ک کی ہر صحیح عددی قیمت سے تفاعل کی ایک شاخ ملتی ہے۔ یعنے لوک ی، ی کا کثیر قیمتی تفاعل ہے۔ اِس صورت میں ہم لوک ی کو بے شمار ایک دوسرے پر رکھی ہوئی مستویوں سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ جس میں سے ہر ایک کے حقیقی مثبت محور کے ساتھ ترچھی کاٹ لی گئی ہو اور ہر ایک ترچھی کاٹ کا کونہ اُس کے مقابلہ کی نچلی ترچھی کاٹ کے کونے سے ملایا گیا ہو۔ اِس صورت میں ابتدائی مقام پر لوک ی نہیں آسکتا۔

$ھ = \sqrt{(ی - ا)(ی - ب)}$ کے لیے ہم نقطوں ی = ا اور ی = ب کو ملانے والے خط کے ساتھ ترچھی کاٹ لیتے ہیں۔ اور مستویوں $س_۱$ اور $س_۲$ کو ترچھی کاٹ کے ساتھ چلیپی طور پر ملاتے ہیں۔ اِس صورت میں لامتناہی شاخ نقطہ نہیں ہے۔

امثلہ نمبری (۵)

(۱) فرض کرو کہ $ھ = \sqrt{۲ - ۲ی + ی^۲}$، اور فرض کرو کہ ی، مرکز ی = ۱ + خ اور نصف قطر $\sqrt{۲}$ والا دائرہ مثبت سمت میں مرتسم کرتا ہے۔ اگر ی نقطہ و سے حرکت کرنا شروع کرے جبکہ ھ کی قیمت $\sqrt{۲}$ ہو تو ھ کی قیمتیں معلوم کرو۔

جبکہ (i) ی، و پر واپس آتا ہے۔

(ii) ی، ما محور کو قطع کرتا ہے۔

جواب (i) $-\sqrt{۲}$ (ii) $\sqrt[۴]{۲۰}\left\{جم\left(\frac{۳\pi}{۸} + \frac{لہ}{۲}\right) + خ\, جب\left(\frac{۳\pi}{۸} + \frac{لہ}{۲}\right)\right\}$

جہاں لہ دوسرے ربع کا زاویہ ہے جس کے لیے مس لہ = −۳

(۲) فرض کرو کہ $ھ = \sqrt{۵ - ۲ی + ی^۲}$، اور ی مرکز ی = ۱ + ۲خ اور نصف قطر ۲ والا دائرہ مثبت سمت میں مرتسم کرتا ہے۔ اگر ی نقطہ نقطہ + ۱ سے حرکت کرنا

شروع کریں جبکہ ھ کی قیمت +۲ ہو تو یہ دائرہ ما محور کو پہلی اور دوسری مرتبہ جن نقطوں پر کاٹتا ہے اُن پر ھ کی قیمتیں معلوم کرو۔

(i) √۲ ، ۴√(۲۰ + ۸√۳) {جم (π/۳ + ع/۲) + خ جب (π/۳ + ع/۲)}،

جہاں ع دوسرے ربع کا زاویہ ہے جس کے لیے مس ع = −۴ − √۳

(ii) √۲ ، ۴√(۲۰ − ۸√۳) {جم (۲π/۳ + ب/۲) + خ جب (۲π/۳ + ب/۲)}،

جہاں ب دوسرے ربع کا زاویہ ہے جس کے لیے مس ب = −۴ + √۳

(۳) وج ا د، وع ب ف، دائرے ہیں جہاں و، ا، ب، ج، د، ع، ف بالترتیب نقاط (۰، ۰)، (۲، ۰)، (۶، ۰)، (۱، ۱)، (۱، −۱)، (۳، ۳)، (۳، −۳) ہیں۔ اگر ھ = √((ی − ۱)(ی − ۴)) اور اگر ھ = ۲، جب ی = صفر تو ھ کی قیمتیں ا پر معلوم کرو جبکہ ی، و سے ا تک حرکت کرے۔

(i) وج ا کی سمت میں

(ii) و د ا کی سمت میں

نیز ی کی قیمت ب پر معلوم کرو جبکہ ی، و سے ب تک حرکت کرے۔

(i) وع ب کے ساتھ جواب − خ √۲ ، خ √۲

(ii) وف ب کے ساتھ − √۱۰ − √۱۰

(۴) ثابت کرو کہ مساوات ی۴ + ی + ۱ = صفر کی ہر ایک ربع میں ایک اصل ہے اور پہلے ربع کی اصل دائرہ |ی| = ۱، کے باہر اور دائرہ |ی| = ۲ کے اندر ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مساوات ی۴ + ی + ۱ = صفر کی جو اصل پہلے ربع میں واقع ہے، اُس مربع کے اندر واقع ہے جس کے ضلع لا = صفر، لا = ۱، ما = صفر اور ما = ۱ ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ مساوات ی۴ + ۴ (۱ + خ) ی + ۱ = صفر کی ہر ایک ربع میں ایک اصل ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ مساوات ی^{۵} − ی + ۱۶ = صفر کی دو اصلوں کے حقیقی حصے مثبت ہیں اور تین کے حقیقی حصے منفی ہیں - نیز یہ بھی دکھاؤ کہ تمام پانچوں اصلیں دائرہ |ی| = ۱ کے باہر اور دائرہ |ی| = ۲ کے اندر ہیں -

(۸) ثابت کرو کہ مساوات ی^{۵} + ۱۰ ی − ۱ = صفر کی صرف وہ اصل جو دائرہ |ی| = ۱ کے اندر ہے حقیقی اور مثبت ہے -

(۹) ثابت کرو کہ مساوات ی^{۵} + ۱۰ ی − ۱ = صفر کی کوئی اصل ایسی نہیں ہے جس کا مقیاس ۲ سے بڑا ہو -

(۱۰) ثابت کرو کہ مساوات ی^{۵} + ۲ ی^{۲} + ی + ۳ = صفر کی اصلیں مطلق قیمت میں ۶ء۱ سے کم ہیں -

(۱۱) اگر ا اور ب حقیقی اور مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات ی^{۴ع} + ا ی + ب = صفر کی ۲ ع اصلیں خیالی محور کی سیدھی طرف اور ۲ ع بائیں طرف ہیں - اگر ب منفی ہو تو ثابت کرو کہ (۲ ع + ۱) اصلیں خیالی محور کی سیدھی طرف اور (۲ ع − ۱) اصلیں بائیں طرف ہیں -

(۱۲) اگر ا اور ب حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات ی$^{۴ع-۱}$ + ا ی + ب = صفر کی ۲ ع یا $\overline{\text{۲ ع − ۱}}$ اصلیں، ھا محور کی سیدھی طرف ہیں اس طرح کہ ب مثبت ہے یا منفی -

(۱۳) اگر ھ = جب$^{-۱}$ ی، تو ثابت کرو کہ ھ = ک π ± خ لوک {خ ی + $\sqrt{\text{۱ − ی}^{۲}}$ }، بموجب اس کے کہ ک جفت ہے یا طاق جبکہ لوک {خ ی + $\sqrt{\text{۱ − ی}^{۲}}$ } کے یک قیمتی ہونے کے لیے ترچھی کاٹ حقیقی محور کے ساتھ ساتھ، ۱ سے + ∞ اور − ∞ سے − ۱ تک لی جائے -

---

باب ششم

ابدال اور ہم شکل تعبیر

۳۲-ابدال —— اگر ھ ، ی کا کوئی تفاعل ف (ی) ہو تو ھ اور ی کے باہمی رشتہ کو ہندسی طور پر تعبیر کیا جا سکتا ہے ۔ اور تب اس رشتہ کو بدل کہا جاتا ہے ۔ نیز یہ کہا جاتا ہے کہ بدل ھ = ف (ی) کے ذریعہ نقطہ ی کو متناظر نقطہ یا نقطوں ھ میں بدلا گیا ہے ۔

اگر ھ = ا ی + ب ، تو بدل **خطی بدل** کہلاتا ہے ۔

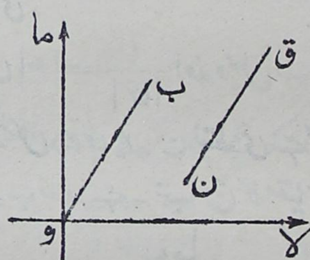
اگر ھ = $\frac{\text{فا (ی)}}{\text{سہ (ی)}}$ جہاں فا (ی) اور سہ (ی) کثیر الارقام جملے ہیں تو بدل کو **منطق بدل** کہتے ہیں ۔

شکل ھ = $\frac{\text{ا ی + ب}}{\text{ج ی + د}}$ کے ابدل **دو خطی ابدال** (Bilinear transformations) کہلاتے ہیں ۔

اب ہم خطی اور دو خطی ابدالوں کے ہندسی معنے معلوم کرتے ہیں ۔

(۱) ھ = ی + ب ،

فرض کرو کہ ن، ق اور ب (شکل ۲۳) بالترتیب نقاط ی، ھ اور ب کو تعبیر کرتے ہیں تب چونکہ ن ق = و ب، اس لیے اس بدل کا اثر یہ ہوتا ہے کہ ہر ایک نقطہ ی پر، مقدار اور سمت میں و ب کے مساوی مقام کی تبدیلی واقع ہوتی ہے۔



شکل (۲۳)

(۲) ھ = ا ی

اِس بدل سے حاصل ہوتا ہے |ھ| = |ا| ۔ |ی| ، اور

دلیل ھ = دلیل ا + دلیل ی

نتیجہ کے طور پر اگر ن اور ق بالترتیب نقاط ی اور ھ ہوں تو نقطہ ن سے نقطہ ق حاصل ہوگا اگر سمتی نیم قطر و ن کو زاویہ، دلیل ا میں سے گھمائیں اور اس کو پھر |ا| سے ضرب دیں۔

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ مستوی کی کوئی شکل اِس بدل سے متشابہ شکل میں بدل جاتی ہے۔

(۳) ھ = ا ی + ب

اِس عام خطی بدل کا اثر سلسلہ وار ابدال ۲ اور ۱ کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ بدل ۲ کی طرح اِس سے مستوی کی کوئی شکل متشابہ شکل میں

بدل جاتی ہے۔

متناظر نقطوں کے درمیان فاصلوں کی نسبت مساوات

$$\left|\frac{ھ_1 - ھ_2}{ی_1 - ی_2}\right| = |ر|$$ سے حاصل ہوتی ہے۔

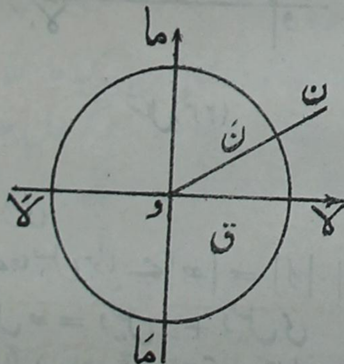
اور متناظر خطوں کے درمیان زاویہ مساوات

دلیل $(ھ_1 - ھ_2)$ − دلیل $(ی_1 - ی_2)$ = دلیل ر سے حاصل ہوتا ہے۔

$$ھ = \frac{1}{ی} \qquad (۴)$$

اس صورت میں $|ھ| = \frac{1}{|ی|}$ اور دلیل ھ = − دلیل ی

اب فرض کرو کہ شکل (۲۴) میں ن نقطہ ی ہے، اور نَ دائرہ $|ی| = ۱$ کے لحاظ سے ن کا مقلوب نقطہ ہے۔ تب نَ کا مقیاس $\frac{1}{|ی|}$ ہے اور اُسکی



شکل (۲۴)

دلیل، دلیل ی کے مساوی ہے۔ پھر فرض کرو کہ لا محور کے لحاظ سے نَ کا خیال ق ہے۔ تب ق کا مقیاس $\frac{1}{|ی|}$ ہے اور اُس کی دلیل، − دلیل ی ہے۔ اِس لیے ق، نقطہ ھ ہے۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ بدل ایسے دائرہ کے لحاظ سے جس کا مرکز مبداء پر ہے اور نصف قطر اکائی ہے، تقلیب کا عمل کے پھر لا محور میں خیال

لینے کے معادل ہے۔

لاتناہی پر کا نقطہ —— جیسے جیسے ی لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے، ھ مبداء کے قریب آتا جاتا ہے ملتف متغیر کے نظریہ میں لاتناہی کو ایک نقطہ تصور کیا جاتا ہے یعنے یہ وہ نقطہ ہے جس کا مبداء کے ساتھ تعلق بذریعہ بدل $ھ = \frac{۱}{ی}$ حاصل ہوتا ہے۔

$$(۵) \quad ھ = \frac{۱}{ی}$$

اِس کو ابدال ر۴ اور ر۲ کو یکے بعد دیگرے لینے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

عام دوخطی بدل $ھ = \frac{ا ی + ب}{ج ی + د}$ جہاں $\frac{ا}{ب} \neq \frac{ج}{د}$

(اگر $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$، تو ھ مستقل ہے۔)

اس بدل کو لکھا جاسکتا ہے

$$ھ = \frac{\frac{ب ج - ا د}{ج^۲}}{ی + \frac{د}{ج}} + \frac{ا}{ج}$$

اِس لیے یہ بدل حاصل ہو گی، اگر ہم تین ابدال $ی_۱ = ی + \frac{د}{ج}$، $ی_۲ = \frac{ک}{ی_۱}$ جہاں $ک = \frac{ب ج - ا د}{ج^۲}$ اور $ھ = ی_۲ + \frac{ا}{ج}$ کو ملائیں۔ یہ بھی دیکھا جائے کہ ھ سے ی بھی دوخطی بدل $ی = \frac{(-د ھ + ب)}{(ج ھ - ا)}$ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ ایک دائرہ کا مقلوب ایک دائرہ یا خط ہوتا ہے، یہ معلوم ہوتا ہے کہ

دو خطی بدل سے دائرے، دائروں میں یا خطوں میں بدل جاتے ہیں۔

مثال (۱) دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 4\,\text{ما} =$ صفر کا متناظر منحنی بذریعہ بدل

$\text{ھ} = \dfrac{(2\,\text{ی} + 3)}{(\text{ی} - 4)}$ معلوم کرو۔

چونکہ $\text{ھ} = 2 + \dfrac{11}{\text{ی} - 4}$ یہ بدل متواتر ابدال

(۱) $\text{ی}_1 = \text{ی} - 4$، (۲) $\text{ی}_2 = \dfrac{1}{\text{ی}_1}$، (۳) $\text{ی}_3 = 11 \times \text{ی}_2$ اور

(۴) $\text{ھ} = \text{ی}_3 + 2$ کا اطلاق کرنے سے بھی حاصل ہوتی ہے۔

بدل (۱) سے حاصل ہوتا ہے $\text{لا} = \text{لا}_1 + 4$، $\text{ما} = \text{ما}_1$

اس لیے $(\text{لا}_1 + 4)^2 + \text{ما}_1^2 - 4\,\text{ما}_1 =$ صفر

بدل (۲) سے ملتا ہے $\text{لا}_1 = \dfrac{\text{لا}_2}{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2}$، $\text{ما}_1 = \dfrac{-\text{ما}_2}{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2}$

جس سے $16(\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2) + 8\,\text{لا}_2 + 4\,\text{ما}_2 + 1 =$ صفر

پھر بدل (۳) سے $\text{لا}_2 = \dfrac{\text{لا}_3}{11}$، اور $\text{ما}_2 = \dfrac{\text{ما}_3}{11}$

اس لیے $16(\text{لا}_3^2 + \text{ما}_3^2) + 88\,\text{لا}_3 + 44\,\text{ما}_3 + 121 =$ صفر

آخر میں، اگر $\text{ھ} = \text{ع} + \text{خ}\,\text{و}$، تو بدل (۴) سے حاصل ہوتا ہے۔

$\text{لا}_3 = \text{ع} - 2$، اور $\text{ما}_3 = \text{و}$

اس لیے دیا ہوا دائرہ

دائرہ $16\,\text{ع}^2 + 16\,\text{و}^2 + 24\,\text{ع} + 44\,\text{و} + 9 =$ صفر میں بدل جاتا ہے۔

مثال (۲) اگر $\text{ھ} = \dfrac{\text{ا}\,\text{ی} + \text{ب}}{\text{ج}\,\text{ی} + \text{د}}$ اور اگر نقاط ھ_1، ھ_2، ھ_3، اور ھ_4

بالترتیب نقاط ی_1، ی_2، ی_3 اور ی_4 کے متناظر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(\text{ھ}_1 - \text{ھ}_2)(\text{ھ}_3 - \text{ھ}_4)}{(\text{ھ}_1 - \text{ھ}_3)(\text{ھ}_2 - \text{ھ}_4)} = \frac{(\text{ی}_1 - \text{ی}_2)(\text{ی}_3 - \text{ی}_4)}{(\text{ی}_1 - \text{ی}_3)(\text{ی}_2 - \text{ی}_4)}$$

$$\text{ھ} = \frac{\text{ا}\,\text{ی} + \text{ب}}{\text{ج}\,\text{ی} + \text{د}} = \frac{\dfrac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی} + \dfrac{\text{د}}{\text{ج}}} + \frac{\text{ا}}{\text{ج}}$$

اس لیے $\dfrac{(\text{ھ}_{۱} - \text{ھ}_{۲})\,(\text{ھ}_{۳} - \text{ھ}_{۴})}{(\text{ھ}_{۱} - \text{ھ}_{۳})\,(\text{ھ}_{۲} - \text{ھ}_{۴})}$

$$= \frac{\left\{\dfrac{\frac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی}_{۱} + \frac{\text{د}}{\text{ج}}} + \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}} - \dfrac{\frac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی}_{۲} + \frac{\text{د}}{\text{ج}}} - \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}}\right\}\left\{\dfrac{\frac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی}_{۳} + \frac{\text{د}}{\text{ج}}} + \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}} - \dfrac{\frac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی}_{۴} + \frac{\text{د}}{\text{ج}}} - \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}}\right\}}{\left\{\dfrac{\frac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی}_{۱} + \frac{\text{د}}{\text{ج}}} + \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}} - \dfrac{\frac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی}_{۳} + \frac{\text{د}}{\text{ج}}} - \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}}\right\}\left\{\dfrac{\frac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی}_{۲} + \frac{\text{د}}{\text{ج}}} + \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}} - \dfrac{\frac{\text{اج} - \text{ب د}}{\text{ج}^{۲}}}{\text{ی}_{۴} + \frac{\text{د}}{\text{ج}}} - \dfrac{\text{ا}}{\text{ج}}\right\}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{\text{ی}_{۱}\text{ج} + \text{د}} - \dfrac{1}{\text{ی}_{۲}\text{ج} + \text{د}}\right)\left(\dfrac{1}{\text{ی}_{۳}\text{ج} + \text{د}} - \dfrac{1}{\text{ی}_{۴}\text{ج} + \text{د}}\right)}{\left(\dfrac{1}{\text{ی}_{۱}\text{ج} + \text{د}} - \dfrac{1}{\text{ی}_{۳}\text{ج} + \text{د}}\right)\left(\dfrac{1}{\text{ی}_{۲}\text{ج} + \text{د}} - \dfrac{1}{\text{ی}_{۴}\text{ج} + \text{د}}\right)}$$

$$= \frac{(\text{ی}_{۱} - \text{ی}_{۲})\,(\text{ی}_{۳} - \text{ی}_{۴})}{(\text{ی}_{۱} - \text{ی}_{۳})\,(\text{ی}_{۲} - \text{ی}_{۴})}$$

یا $(\text{ھ}_{۱}\ \text{ھ}_{۲}\ \text{ھ}_{۳}\ \text{ھ}_{۴}) = (\text{ی}_{۱}\ \text{ی}_{۲}\ \text{ی}_{۳}\ \text{ی}_{۴})$

جہاں $(\text{ی}_{۱}\ \text{ی}_{۲}\ \text{ی}_{۳}\ \text{ی}_{۴})$ اوپر کے مساوات کی بائیں جانب کے جملہ کو تعبیر کرتا ہے۔

یہ جملہ، چار نقطوں $\text{ی}_{۱}$، $\text{ی}_{۲}$، $\text{ی}_{۳}$، اور $\text{ی}_{۴}$ کی 'چلیپی نسبت' کہلاتا ہے
کسی دوخطی بدل سے چلیپی نسبت کی قیمت نہیں بدلتی۔ یعنے یہ دوخطی بدل کے لیے غیر متغیر (invariant) ہے۔

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ کسی دوخطی بدل کو جو تین نقطوں $\text{ی}_{۱}$، $\text{ی}_{۲}$، $\text{ی}_{۳}$

کو متناظر نقطوں ھ۱، ھ۲، ھ۳ میں بدل دیں، شکل

(ی ی۱ ی۲ ی۳) = (ھ ھ۱ ھ۲ ھ۳) میں لکھا جاسکتا ہے۔

چونکہ تین دیے ہوئے نقطوں میں سے جو ہم خط نہ ہو ایک دائرہ گزر سکتا ہے، اس لیے ہم ایک ایسی بدل معلوم کرسکتے ہیں جس سے ی۱، ی۲، ی۳ میں سے گزرنے والا دائرہ ھ۱، ھ۲، ھ۳ میں سے گزرنے والے دائرہ میں بدل جائے۔

یعنی ایک دوخطی بدل ہمیشہ اس طرح کی معلوم کی جاسکتی ہے کہ ی مستوی کا کوئی دائرہ، ھ مستوی کے ایک دیے ہوئے دائرہ میں بدل جائے۔

اسی طرح سے ی، مستوی کا کوئی خط، ھ مستوی کے ایک دیے ہوئے خط میں بدل دیا جاسکتا ہے۔ خاص طور پر ی کے حقیقی محور کو، ی۱، ی۲، ی۳ ھ۱، ھ۲، ھ۳ کو حقیقی قیمتیں دینے سے، ھ محور کے حقیقی حصہ میں بدل دیا جاسکتا ہے۔ ی مستوی کا دائرہ ھ مستوی کے اندر صرف دائرہ ہی میں تبدیل نہیں کیا جاسکتا بلکہ ھ مستوی کے اندر اس کو ایک خط میں بھی بدل دیا جاسکتا ہے۔

مثال (۳) وہ دوخطی بدل معلوم کرو جس سے ی مستوی کے نقاط، ۱، خ، -۱، ھ مستوی میں بالترتیب ۰، ۱، ∞ کے متناظر ہوں۔ ثابت کرو کہ اس بدل سے دائرہ |ی| = ۱ کا رقبہ ھ مستوی میں حقیقی محور کے اوپر کے نصف مستوی سے تعبیر ہوتا ہے۔

چونکہ ی مستوی کا نقطہ (۱) ھ مستوی کے نقطۂ صفر کے متناظر ہے اور ی مستوی کا نقطہ (-۱) ھ مستوی کے نقطۂ ∞ کے متناظر ہے۔

اس لیے بدل کو شکل $\text{ھ} = \text{ا}\,\frac{\text{ی}-۱}{\text{ی}+۱}$ میں لکھ سکتے ہیں۔

نیز ا معلوم کرنے کے لیے ی مستوی کا نقطۂ خ، ھ مستوی کے نقطۂ ۱ کے متناظر ہے۔

$$۱ = \text{ا}\,\frac{\text{خ}-۱}{\text{خ}+۱}$$

اس لیے $\text{ا} = \frac{\text{خ}+۱}{\text{خ}-۱}$

اس لیے دوخطی بدل ہے، $ھ = \frac{خ + ۱}{خ - ۱} \times \frac{ی - ۱}{ی + ۱}$

$$= \frac{(خ + ۱)^۲}{(خ + ۱)(خ - ۱)} \times \frac{ی - ۱}{ی + ۱}$$

$$= - خ \frac{ی - ۱}{ی + ۱}$$

$$ھ = - خ \left[\frac{ی - ۱}{ی + ۱}\right]$$

$$= - خ \left[۱ - \frac{۲}{ی + ۱}\right]$$

[illegible] بدال

[illegible] $ی + ۱$ ، (۲) $ی_۲ = \frac{۱}{ی_۱}$ ، (۳) $ی_۳ = + ۲ ی_۲$ اور

[illegible] $خ (۱ - ی_۳)$ کے متواتر اِطلاق سے حاصل ہوتی ہے ۔

[illegible] دائرہ کی مساوات ہے $لا^۲ + ما^۲ = ۱$

[illegible] ہوتا ہے $لا = لا_۱ - ۱$ اور $ما = ما_۱$

[illegible] $ما_۱^۲ = ۱$

یعنی $لا_۱$ + [illegible] $- ۲ لا_۱$ [illegible] = صفر

بدل [illegible] سے حاصل ہوتا ہے $لا_۱ = \frac{لا_۲}{لا_۲^۲ + ما_۲^۲}$ ، $ما_۱ = \frac{- ما_۲}{لا_۲^۲ + ما_۲^۲}$

جس سے $\left(\frac{لا_۲}{لا_۲^۲ + ما_۲^۲}\right)^۲ + \left(\frac{ما_۲}{لا_۲^۲ + ما_۲^۲}\right)^۲ - \frac{۲ لا_۲}{(لا_۲^۲ + ما_۲^۲)} =$ صفر

یعنی $(لا_۲^۲ + ما_۲^۲) - ۲ لا_۲ (لا_۲^۲ + ما_۲^۲) =$ صفر

یعنی $۱ - ۲ لا_۲ =$ صفر

بدل (۳) سے لا۲ = لا۳ / ۲ اور ما۲ = ما۳ / ۲

جس سے ۱ - ۴ × لا۳ / ۴ = صفر

یعنی ۱ - لا۳ = صفر

بدل (۴) سے (۶ + خ و) = - خ [۱ - لا۳ - خ ما۳]

یعنی خ و = - خ [۱ - لا۳]

یعنی و + ۱ = لا۳

یعنی لا۳ = و + ۱

جس سے ۱ - و - ۱ = صفر

یعنی و = صفر

جس سے صاف ظاہر ہے کہ دائرہ |ی| = ۱، ھ مستوی کے حقیقی محور میں بدل جاتا ہے۔

اس کو دیکھنے کے لیے کہ دائرہ کا اندرونی حصہ ھ مستوی کے اوپر کے نصف حصہ کے تناظر ہے۔

رکھو ی = ر قو^(خ ط) جہاں ر < ۱

تب ھ = خ (۱ - ی) / (۱ + ی)

ھ = خ (۱ - ر قو^(خ ط)) / (۱ + ر قو^(خ ط))

= خ (۱ - ر قو^(خ ط)) (۱ + ر قو^(-خ ط)) / (۱ + ر قو^(خ ط)) (۱ + ر قو^(-خ ط))

= خ [(۱ - ر^۲) + (ر قو^(-خ ط) - ر قو^(خ ط))] / [(۱ + ر^۲) + ر (قو^(خ ط) + قو^(-خ ط))]

$$= \text{خ} \frac{(1-\text{ر}^2) - 2\text{خ ر جب ط}}{1+\text{ر}^2+2\text{ر جم ط}}$$

$$= \frac{2\text{ر جب ط}}{1+2\text{ر جم ط}+\text{ر}^2} + \text{خ} \frac{(1-\text{ر}^2)}{1+2\text{ر جم ط}+\text{ر}^2}$$

اگر ر < ۱، تو خیالی حصہ مثبت ہے اِس لیے دائرہ |ی| < ۱ کا اندرونی حصّہ اوپر کے نصف حصے کے متناظر ہے۔

دائرہ |ی| = ۱ کے محیط پر کے کسی نقطہ کے لیے ر = ۱، ھ حقیقی ہے اِس لیے

$$\text{ھ} = \frac{2\text{ جب ط}}{2(1+\text{جم ط})} = \text{مس} \frac{\text{ط}}{2}$$

اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اوپر کا نصف دائرہ (۰ ≦ ط < π) حقیقی محور کے مثبت آدھے حصے میں اور نیچے کا نصف دائرہ (π < ط < ۲π) حقیقی محور کے منفی آدھے حصے میں بدل جاتا ہے۔

مثال (۴) اُن تمام دوخطی ابدالوں کو معلوم کرو جس سے ی مستوی کا دائرہ |ی| ≦ ۱، ھ مستوی میں متناظر دائرہ |ھ| ≦ ۱ میں بدل جاتا ہے۔

فرض کرو کہ مطلوبہ بدل $\text{ھ} = \frac{\text{ا ی} + \text{ب}}{\text{ج ی} + \text{د}}$ ہے۔

اب ج ≠ صفر، ورنہ دونوں مستویوں میں لامتناہی پر کے نقاط متناظر ہوں گے۔

ھ = ۰ اور ھ = ∞، ی = $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ اور ی = $-\frac{\text{د}}{\text{ج}}$ کے متناظر ہیں۔

اب فرض کرو کہ $-\frac{\text{ب}}{\text{ا}} = \text{ع}$ اور $-\frac{\text{د}}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{ع}}$

$$\text{تب ھ} = \frac{\text{ا}}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{ی}-\text{ع}}{\text{ی}-\frac{1}{\text{ع}}} = \frac{\text{ا ع}}{\text{ج}} \times \frac{\text{ی}-\text{ع}}{\text{ع ی}-1}$$

نقطہ ی = ۱، |ھ| = ۱، پر کے ایک نقطہ کے متناظر ہے

اور اس لیے
$$\left|\frac{ا\,\bar{عہ}}{ج}\cdot\frac{ا-عہ}{\bar{عہ}-ا}\right| = \left|\frac{ا\,\bar{عہ}}{ج}\right| = ۱$$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر طہ حقیقی ہو، تو $ا\,\bar{عہ} = ج\,و^{خ\,طہ}$ اور اس لیے

$$ھ = \frac{ی-عہ}{\bar{عہ}\,ی-۱}\,و^{خ\,طہ}$$

$$ھ = \frac{ی-عہ}{\bar{عہ}\,ی-۱}\,و^{خ\,طہ}$$

اور یہ مطلوبہ بدل ہے، کیونکہ اگر $ی = و^{خ\,سہ}$ اور $= ب\,و^{خ\,لہ}$، تو

$$|ھ| = \left|\frac{و^{خ\,سہ} - ب\,و^{خ\,لہ}}{ب\,و^{خ(سہ-لہ)} - ۱}\right| = ۱$$

اگر $ی = ر\,و^{خ\,سہ}$، جہاں $ر < ۱$، تو

$$|ی-عہ|^۲ - |\bar{عہ}\,ی-۱|^۲$$

$$= ر^۲ - ۲\,ر\,ب\,جم(سہ-لہ) + ب^۲ - \left\{ب^۲ ر^۲ - ۲\,ر\,ب\,جم(سہ-لہ) + ۱\right\}$$

$$= (ر^۲-۱)(۱-ب^۲) < صفر$$

یعنی $|ھ| < ۱$

دوسرے الفاظ میں دائروں کے اندرونی حصے متناظر ہوتے ہیں۔

مثال (۵) بدل $ھ = ی^۲$

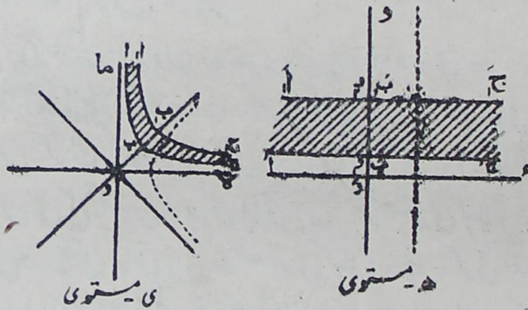
$$ھ = (ع + خ\,د) = (لا + خ\,ما)^۲ = لا^۲ - ما^۲ + ۲\,خ\,لا\,ما$$

اِس لیے $ع = لا^۲ - ما^۲$ اور $و = ۲\,لا\,ما$ .... (۱)

مساواتوں (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ منحنی ع = مستقل اور و = مستقل، ی مستوی میں قائم زائدوں کے دو نظام ہیں۔

طالب علم اِس کی آسانی کے ساتھ تصدیق کر سکتا ہے کہ ی مستوی میں

زائدوں ۲ لا ما = و۱ ، ۲ لا ما = و۲ سے گھیرا ہوا رقبہ، ھ مستوی میں لامتناہی پٹی سے تعبیر ہوتا ہے۔ جس کو (شکل ۲۵) میں دکھایا گیا ہے۔ اس لیے ھ = ی۲ دو زائدوں کے درمیانی رقبہ کو، ایک متوازی پٹی میں بدل دیتا ہے۔



شکل (۲۵)

اگر ب۱ لامتناہی پہ ہو، تو نقطہ بَ بھی لامتناہی پر ہوگا اور زاویہ ا ب ج کا اندرونی حصہ خط اَ بَ جَ پر کے اوپر کے نصف مستوی میں بدل جاتا ہے۔

ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ بدل ھ = ی۲ سے، ی مستوی کے دائرے |ی - ا| = ج جہاں ا اور ج حقیقی ہیں ھ مستوی میں (Limacons) میں بدل جاتے ہیں۔

دائرہ |ی - ا| = ج و^{غ طہ} پر غور کرو .... (۱)

تب ھ - ا۲ + ج۲ = ۲ ج (ج جم طہ + ا) و^{غ طہ}

اس لیے (ھ - ا۲ + ج۲) کو ر و^{غ طہ} کے مساوی لکھنے سے

یعنے ھ مستوی میں قطب کو ھ = ا۲ - ج۲ پر لینے سے مساوات (۱) قطبی محددوں میں (Limacon)

ر = ۲ ا ج + ۲ ج۲ جم طہ میں بدل جاتی ہے۔

جب ا = ج، تو (Limacon) صنوبری ہوجاتا ہے۔
یہ اُس صورت میں واقع ہوتا ہے جبکہ دائرہ |ی - ا| = ج تو ۰ ، و ما
کو مبداء پر مس کرتا ہے۔

۳۳- ہم شکل تعبیر

فرض کرو کہ ملتف متغیروں ھ = (۶ + خ و) اور ی = (لا + خ ما) کا ھ = ف (ی)، ایک تحلیلی تفاعل ہے۔ ہم ی کی قیمتوں کو آرگینڈ کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں اور اس کے متناظر ھ کی قیمتوں کو ایک اور شکل میں ظاہر کرتے ہیں وہ مستوی جس میں ی کی قیمتیں ظاہر کی جاتی ہیں، ی مستوی کہلاتا ہے اور جس میں ھ کی قیمتیں درج کی جاتی ہیں ھ مستوی کہلاتا ہے۔ کوئی نقطہ جو ی مستوی میں ہوتا ہے، ی کی ایک معین قیمت کے متناظر ہوتا ہے اور اس کے متناظر ھ کی ایک معین قیمت حاصل ہوگی کیونکہ ہم نے فرض کیا ہے کہ ھ = ف (ی)، ی کا ایک قیمتی تفاعل ہے۔

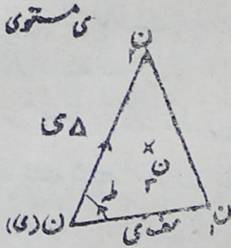
اگر ی مستوی میں نقطہ ن، ی کی ایک قیمت کو ظاہر کرے جس کے لیے تفاعل ف (ی) محدود ہے اور اُس کا تفرقی سر اُس نقطہ پر صفر نہیں ہے تو اِس نقطہ ن کو سادہ نقطے کہتے ہیں۔

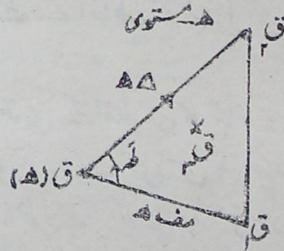
نقطہ ن کی متناظر قیمت ھ مستوی میں، ایک نقطہ ق سے تعبیر ہوگی جو مبدأ سے محدود فاصلہ پر ہے۔

فرض کرو کہ ن$_1$ اور ن$_2$ (شکل ۲۶) میں ن کے قریب دو سادہ نقطے ی + مف ی اور ی + ∆ ی ہیں جن کے متناظر نقطے ھ مستوی میں ق$_1$ اور ق$_2$ ھ + مف ھ = ف (ی + مف ی) اور ھ + ∆ ھ = ف (ی + ∆ ی) ہیں چونکہ ھ کا ی کے لحاظ سے یگانہ طور پر تفرقی سر وجود رکھتا ہے

اِس لیے $\frac{\text{مف ھ}}{\text{مف ی}}$ اور $\frac{\text{∆ ھ}}{\text{∆ ی}}$ دونوں ایک ہی انتہا $\frac{\text{ف ھ}}{\text{ف ی}}$ کی طرف مائل ہوتے ہیں جبکہ ن ن$_1$ اور ن ن$_2$ صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں۔

اگر ن$_1$ اور ن$_2$ کافی چھوٹے ہوں تو ہم لکھ سکتے ہیں۔





شکل (۲۶)

$$\frac{\text{مف ھ}}{\text{مف ی}} = \frac{\Delta\,\text{ھ}}{\Delta\,\text{ی}}$$

یعنی

$$\frac{\Delta\,\text{ی}}{\text{مف ی}} = \frac{\Delta\,\text{ھ}}{\text{مف ھ}}$$

$\frac{\text{ن ن}_2}{\text{ن ن}_1}$ وغ$^{\text{ط}}$ $=$ $\frac{\text{ق ق}_2}{\text{ق ق}_1}$ وغ$^{\text{طَ}}$ ، جہاں ط اور طَ بالترتیب زاویے ن$_1$ ن ن$_2$ اور ق$_1$ ق ق$_2$ ہیں۔

اِس سے حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{\text{ن ن}_2}{\text{ن ن}_1} = \frac{\text{ق ق}_2}{\text{ق ق}_1}$ اور ط $=$ طَ

یعنی صغاریٔ مثلثات ن ن$_1$ن$_2$ اور ق ق$_1$ق$_2$ راست متشابہ ہیں۔

اگر مثلث ن ن$_1$ن$_2$ کے اندر کوئی نقطہ ن$_3$ ہو، تو متناظر نقطہ ق$_3$ ایسا ہوگا کہ مثلثات ن$_1$ن$_1$ن$_3$ اور ق ق$_1$ق$_3$ راست متشابہ ہوں گے اور نقطہ ق$_3$ مثلث ق ق$_1$ق$_2$ کے اندر واقع ہوگا۔

رشتہ ھ = ف (ی)، صغاری مثلث ن ن$_1$ن$_2$ کو ھ مستوی میں مثلث ق ق$_1$ق$_2$ میں بدل دیتا ہے جو ن ن$_1$ن$_2$ کے راست متشابہ ہے۔

پہلے مثلث کے اندرونی نقاط، دوسرے مثلث کے اندرونی نقاط کے متناظر ہوتے ہیں - ایک نقطہ جو پہلے مثلث کے احاطہ کے گرد مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے ایسے نقطہ میں بدل جاتا ہے جو دوسرے مثلث کے احاطہ کے گرد اسی سمت میں حرکت کرتا ہے -

ھ مستوی کے نقطہ ق کو ی مستوی کے نقطہ ن کا متناظری نقطہ کہتے ہیں - اب جیسے جیسے نقطہ ن، ی مستوی میں ایک منحنی س مرتسم کرتا ہے، نقطہ ق جو ھ مستوی میں ن کے متناظر ہے، ایک اور منحنی سَ مرتسم کریگا اِس منحنی سَ کو، منحنی س کا **متناظری منحنی** کہتے ہیں -

اگر ن میں سے گذرنے والے دو منحنیوں پر جزوی قوسین ن ن۱ اور ن ن۲ ہوں اور اس کے متناظر نقطہ ق میں سے گذرنے والے دو متناظر منحنیوں پر جزوی قوسین ق ق۱ اور ق ق۲ ہوں تو ہم نے دیکھا ہے کہ زاویے ن۱ ن ن۲ اور ق۱ ق ق۲ سمت اور مقداریں مساوی ہیں - یعنے تبدیل شدہ منحنی اُسی زاویہ پر قطع کرتے ہیں جس زاویہ پر کے ابتدائی منحنی قطع کرتے ہیں - خاص طور پر علی القوائم منحنی، علی القوائم منحنیوں میں بدل جاتے ہیں -

اگر ی مستوی میں گ کوئی بند گھیرا ہو، تو ھ مستوی میں اس کے متناظر گَ ایک اور بند گھیرا حاصل ہوگا -

اگر ون اور ونَ، قیمتوں ی اور ی + مف ی کو ظاہر کریں تو جز ن نَ، مف ی یا فری کو ظاہر کریگا اسی طرح سے جز ق قَ، جز فرھ کو ظاہر کرے گا -

$$\text{اب فرھ} = \frac{\text{فرھ}}{\text{فری}}\ \text{فری}$$

اس لیے چھوٹا جز ق قَ، ن نَ سے ملیگا اگر ہم اس کو $\frac{\text{فرھ}}{\text{فری}}$ سے ضرب دیں -

یہ ضارب (Multiplier) ی مستوی میں نقطہ کے مقام پر منحصر ہوتا ہے اور اس کے طول اور سمت پر منحصر نہیں ہوتا۔

اب اگر ہم $\frac{\text{فرھ}}{\text{فری}}$ = فَ (لا + خ ما) کو شکل ک (جم فہ + خ جب فہ) سے ظاہر کریں تو

جز فرھ، متناظر جز فری سے ملیگا اگر ہم اس کے طول کو ک سے ضرب دیں یعنے $\left|\frac{\text{فرھ}}{\text{فری}}\right|$ سے ضرب دیں اور اُس کو زاویہ فہ یعنے دلیل $\left(\frac{\text{فرھ}}{\text{فری}}\right)$ میں سے گھمائیں۔

اِس سے ظاہر ہے کہ ی مستوی میں رقبہ کا کوئی جز، ھ مستوی میں ایک ایسے جز میں تحویل ہوجاتا ہے، جس کی شکل ابتدائی جز کے متشابہ ہے، خطی ابعاد $\left|\frac{\text{فرھ}}{\text{فری}}\right|$ گنا ہیں۔ رقبی ابعاد $\left|\frac{\text{فرھ}}{\text{فری}}\right|^2$ گنا ہیں اور اس کی سمت ابتدائی سمت کو زاویہ فہ میں سے گھمانے سے حاصل ہوتی ہے۔

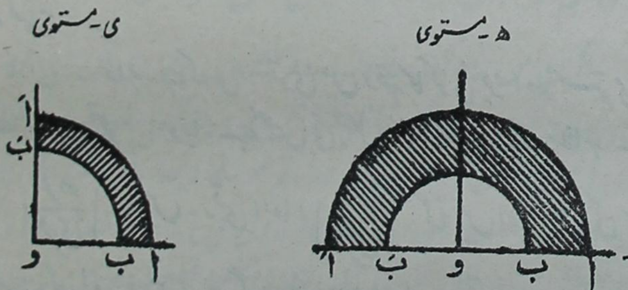
اس بات سے کہ دونوں مستویوں میں متناظر صغاری اجزا متشابہ ہیں، یہ طریقہ جس سے ہم ایک مستوی کی ایک شکل کو دوسرے مستوی کے متناظر متشابہ شکل میں لے جاتے ہیں ہم شکل تعبیر کہلاتا ہے۔

یہ غور سے دیکھا جائے کہ اوپر کی تحقیق صرف سادہ نقطوں کی حد تک محدود ہے۔ اگر نقاط، سادہ نقاط نہ ہوں بلکہ نادر نقاط ہوں تو یہ خاصیت درست نہیں رہتی۔

مثال (۶) بدل ھ = ی۲ سے ی مستوی کے پہلے ربع کا وہ رقبہ جو دائروں |ی| = ا، |ی| = ب اور محوروں سے گھیرا ہے جہاں (ا > ب > ۰)، ھ مستوی کے جس رقبہ میں بدل جاتا ہے اُسے معلوم کرو۔

اگر ی = ر و^{خ ط}، تو ھ = ر^۲ و^{۲خ ط}، یعنے |ھ| = ر^۲ اور دلیل ھ = ۲ ط - ربعی قوسین ا اَ، ب بَ جنکے نصف قطر بالترتیب ا اور ب ہیں۔ ھ مستوی میں نصف دائری قوسوں ا اَ اور ب بَ میں بدل جاتے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب ا^۲ اور ب^۲ ہیں۔ خطوط ا ب اور اَ بَ ۶ محور کے اُس حصہ کے متناظر ہیں جو نقطوں ھ = ا^۲ اور ھ = ب^۲ اور ھ = -ا^۲ اور ھ = -ب^۲ کے درمیان ہے۔

شکل (۲۷) میں دو مستویوں کے متناظر نقطوں کو ایک ہی حرف سے



شکل (۲۷)

دکھایا گیا ہے۔ کسی نقطہ پر تکبیر مساوات |قر ھ / قر ی| = ۲ |ی| سے حاصل ہوتا ہے۔ یہ دیے ہوئے رقبہ کے اندر اور اس کے احاطہ پر کے ہر نقاط کے لیے محدود ہے اور صفر نہیں ہے۔ اس لیے یہ بدل، ہم شکل تعبیر ہے۔ مثلاً دونوں شکلوں میں ا، ب اور اَ، بَ پر کے زاویے قائمہ ہیں۔ لیکن اگر ب صفر ہو جائے یعنے ی کا رقبہ ربع و ا اَ رہے، تو ھ مستوی میں اس کا متناظر رقبہ ا اَ پر کے نصف دائرہ سے تعبیر ہوتا ہے۔ اور یہ بدل تمام نقطوں پر سوائے و کے ہم شکل ہے۔ و پر یہ ہم شکل بدل نہیں ہے کیونکہ یہاں پر تکبیر صفر کے مساوی ہے۔ دونوں مستویوں میں و پر کے زاویے مساوی نہیں

ہیں - ی مستوی میں و پر کا زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہے لیکن ھ مستوی میں، و پر کا زاویہ π ہے - لیکن نقطوں ا، اَ پر کے زاویے ابھی قائمہ ہیں -

مثال (۷) بدل ھ = یⁿ

فرض کرو کہ ھ = (ع + خ و) = ک $و^{خ فہ}$

اور ی = (لا + خ ما) = ر $و^{خ طہ}$

تب ک $و^{خ فہ}$ = $ر^{ن}$ $و^{خ ن طہ}$

یعنے ک = $ر^{ن}$ اور فہ = ن طہ

یعنے (ع + خ و) = $ر^{ن}$ (جم ن طہ + خ جب ن طہ)

مساواتوں ع = $ر^{ن}$ جم ن طہ اور و = $ر^{ن}$ جب ن طہ، سے طہ یا ر کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے -

$ع^{۲} + و^{۲} = ر^{۲ن} = (لا^{۲} + ما^{۲})^{ن}$ .... (۱)

اور مس ن طہ = $\frac{و}{ع}$ .... (۲)

مساوات ۱ سے معلوم ہوتا ہے کہ، ی مستوی کے دائرے ر = ج، ھ مستوی کے دائرے ک = $ج^{ن}$ کے متناظر ہیں - دائرہ ر = ی = ا پر کے نقاط، ھ مستوی میں مبداء سے اکائی فاصلہ پر کے نقاط میں بدل جاتے ہیں ی مستوی میں مبداء سے نکلنے والے خطوط طہ = مستقل، ھ مستوی میں متشابہ خطوط فہ = مستقل میں بدل جاتے ہیں - جس خط کا میلان ی مستوی میں طہ ہے، وہ خط ھ مستوی میں ایسے خط میں بدل جاتا ہے، جس کا میلان ن طہ ہے - چونکہ ی = ۰، اس بدل کا نادر نقطہ ہے، اس لیے اس نقطہ پر ہم شکل تعبیر کی خاصیت درست نہیں رہتی -

مثال (۸) ھ = $و^{ی}$

فرض کرو کہ ی = لا + خ ما

اور = ک (جم فہ + خ جب فہ)

تب ک (جم فہ + خ جب فہ) = ٶ$^{\text{لا}+\text{خ ما}}$ = ٶ$^{\text{لا}}$ (جم ما + خ جب ما)

یعنے ک جم فہ = ٶ$^{\text{لا}}$ جم ما

اور ک جب فہ = ٶ$^{\text{لا}}$ جب ما

اس لیے ک = ٶ$^{\text{لا}}$ اور فہ = ما

ی مستوی کی متوازی پٹی جو خطوط ما = ما$_{1}$ اور ما = ما$_{2}$ سے گھیری ہوئی ہے، جہاں |ما$_{1}$ – ما$_{2}$| < ۲π، ھ مستوی میں فانہ کی شکل کے رقبہ میں بدل جاتی ہے فانہ کا زاویہ عہ = |فہ$_{2}$ – فہ$_{1}$| = |ما$_{2}$ – ما$_{1}$| ہے۔ اِن رقبوں کے اندر تمام نقاط پر تعبیر ہم شکل تعبیر ہے کیونکہ اِس رقبہ کے اندر کہیں بھی

$\frac{\text{ڈھ}}{\text{ڈی}}$ صفر نہیں ہے۔

خاص طور پر اگر ما$_{1}$ = صفر، اور ما$_{2}$ = π جس سے |ما$_{2}$ – ما$_{1}$| = π، تو فانہ، نصف مستوی ہو جاتا ہے۔ نصف لامتناہی پٹی، – ∞ ≥ لا ≥ صفر، ۰ ≥ ما ≥ π، ھ مستوی میں اوپر کے نصف حصہ پر اکائی نصف قطر کے نصف دائرہ میں بدل جاتی ہے۔

اگر |ما$_{1}$ – ما$_{2}$| > ۲π، تو حاصل شدہ فانہ، ھ مستوی کو کثیر مرتبہ گھیرتا ہے اِس صورت میں مزید تحقیق کے لیے ریمان کی سطحوں پر بحث کرنا ہوگا۔

مثال (۹) ھ = لوک ی

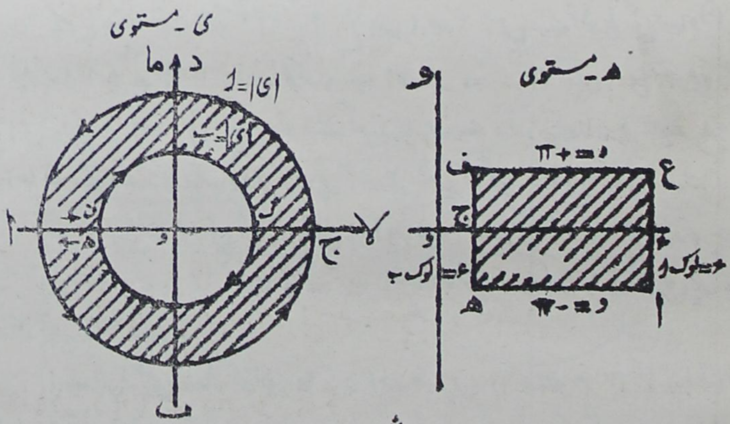
اگر ی = ر (جم طہ + خ جب طہ) تو

ھ = لوک ر + خ طہ، جہاں ر، ی کا مقیاس اور طہ، ی کے دلیل کی صدر قیمت ہے۔

[لوک ی کثیر قیمتی تفاعل ہے۔ ہم نے اس کی وہ شاخ لی ہے جس کے لیے –π > طہ > π]

اگر ی نقطہ ی = -۱ سے حرکت کرنا شروع کرکے دائرہ |ی| = ا، مخالف سمت ساعت میں مرتسم کرے تو ء مستقل رہتا ہے اور و، مسلسل طور پر -π سے +π تک بدلتا ہے، اگر ی اپنی حرکت جاری رکھیں تو جب یہ حقیقی محور کو نقطہ ی = -ا پر قطع کرتا ہے، تو طہ میں غیر تسلسل ہوتا ہے۔ اِس کو دور کرنے کے لیے ہم حقیقی محور کے منفی حصہ کے ساتھ ایک ترچھی کاٹ لیتے ہیں۔

چونکہ $\frac{\text{فرط}}{\text{فری}} = \frac{1}{\text{ی}}$، لوک ی کے نادر نقطے صرف مبداء اور لاتناہی پر ہیں۔ ترچھی کاٹ لینے سے حاصل شدہ مستوی کے اُس حصہ میں جو دائروں |ی| = ا، |ی| = ب، (ب < ا) کے اندر ہے، لوک ی یک قیمتی، محدود اور مسلسل ہے۔



شکل (۲۸)

شکل (۲۸) میں فرض کرو کہ نقطہ ی، دائرہ ا ب ج د ع (|ی| = ا) ترچھی کاٹ کا اوپر کا حصہ ع ف، دائرہ ف گ ھ (|ی| = ب) اور ترچھی کاٹ کا نچلا حصہ ھ ا کے گرد نشان کی سمت میں حرفوں کے ترتیب سے

لحاظ سے حرکت کرتا ہے۔

جب ی، ا ب ج د ع مرتسم کرتا ہے، ہ، خط ۶ = لوک ا پر اور اُن دو نقطوں کے درمیان حرکت کرتا ہے جس کے لیے و کی قیمتیں $-\pi$ اور $+\pi$ ہیں۔

جب ی، ع سے ف تک حرکت کرتا ہے، تو و مستقل ہے اور π کے کے مساوی ہے، لیکن ۶، کی قیمت لوک ا سے لوک ب تک گھٹتی ہے۔

جب ی، ف گ ہ کے گرد حرکت کرتا ہے تو ہ خط ۶ = لوک ب پر اُن دو نقطوں کے درمیان حرکت کرتا ہے جس کے لیے و = $\pm\pi$

آخرکار جب ی، ہ ا کو طے کرکے ا پر پہنچتا ہے، تو و مستقل ہوتا ہے اور اس کی قیمت $-\pi$ ہوتی ہے اور ۶ کی قیمت لوک ب سے لوک ا تک بڑھتی ہے۔

پس ہ مستوی کا مستطیل ا ع ف ہ، جس کے خطوط کی مساواتیں، ۶ = لوک ا، و = π، ۶ = لوک ب اور و = $-\pi$ ہیں، ی مستوی کے اندر ا ی ا = ا اور ا ی ا = ب سے گھیرے ہوئے رقبہ کے متناظر ہے اور کسی احاطہ کے اندر کا رقبہ دوسرے پر ہمشکلاً تعبیر کیا گیا ہے۔

اگر ا، لامتناہی کی طرف مائل ہو اور ب، صفر کی طرف مائل ہو تو پورا ی ـ مستوی، ہ مستوی میں خطوط و = $\pm\pi$ سے گھیرے ہوئے لامتناہی چوڑی پٹی سے تعبیر ہوتا ہے۔

اب اگر ترچھی کاٹ کو نکالا جائے اور ط میں π سے 3π تک اضافہ کیا جائے، تو پورا ی ـ مستوی ہ مستوی میں اُس پٹی کے متناظر ہے جو خطوط و = π اور و = 3π کے درمیان ہے۔ اِس طرح سے پورے ہ مستوی کو چوڑائی 2π والے پٹیوں میں تقسیم کرسکتے ہیں جن میں سے ہر ایک پر پورا ی مستوی تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ اگرچہ لوک ی، ی کا کثیر قیمتی تفاعل ہے، لوہ، ی کا ایک قیمتی تفاعل ہے۔

مثال (۱۰) ھ = جمز ی

(ء + خ د) = جمز (لا + خ ما)

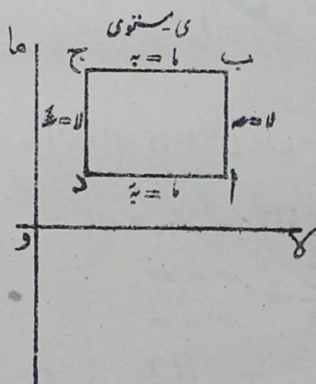
= جمز لا جم ما + خ جبز لا جب ما

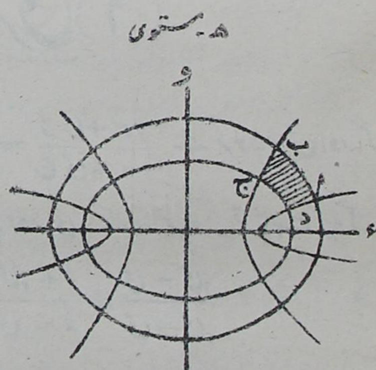
اس لیے ء = جمز لا جم ما

اور و = جبز لا جب ما

جس سے $\frac{\text{ء}^2}{\text{جمز}^2\text{ لا}} + \frac{\text{و}^2}{\text{جبز}^2\text{ لا}} = 1$

اور $\frac{\text{ء}^2}{\text{جم}^2\text{ ما}} - \frac{\text{و}^2}{\text{جب}^2\text{ ما}} = 1$





شکل (۲۹)

اگر لا مستقل ہو تو ھ کا طریق ناقص $\frac{\text{ء}^2}{\text{جمز}^2\text{ لا}} + \frac{\text{و}^2}{\text{جبز}^2\text{ لا}} = 1$ ہے۔

اگر ما مستقل ہو تو ھ کا طریق زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{جم}^2\text{ ما}} - \frac{\text{و}^2}{\text{جب}^2\text{ ما}} = 1$ ہے۔

یہ صاف ظاہر ہے کہ لا اور ما کی مختلف قیمتوں کے لیے یہ ہم ماسکہ نظام ہیں جن کے ماسکے نقاط ھ = ± ۱ پر ہیں - ی مستوی کا مستطیل ا ب ج د {شکل (۲۹)} جس کے اضلاع خطوط لا = ع، ما = ب، لا = عَ، ما = بَ ہیں، ھ مستوی میں متناظر رقبہ ا ب ج د میں جو متناظر ناقصوں اور زائدوں کے درمیان ہے تبدیل ہوتا ہے - ھ مستوی میں ایسے تو چار رقبے ہیں لیکن اِن میں سے صرف ایک مستطیل ا ب ج د کے متناظر ہے - دوسرے رقبے مستطیل ا ب ج د کے لا اور ما محوروں میں خیال لینے حاصل ہوتے ہیں -

بالکل اِسی کے مماثل عمل ھ = جم ی، ھ = جب ی کے لیے کیا جاسکتا ہے -

امثلہ نمبری (۶)

(۱) اگر ھ اور ی دو خطی بدل $\text{ھ} = \frac{\text{ا ی + ب}}{\text{ج ی + د}}$ سے مربوط ہوں اور اگر نقاط ھ_1 اور ھ_2 بالترتیب نقاط ی_1 اور ی_2 کے متناظر ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ھ} - \text{ھ}_1}{\text{ھ} - \text{ھ}_2} = \frac{\text{ج ی}_2 + \text{د}}{\text{ج ی}_1 + \text{د}} \times \frac{\text{ی} - \text{ی}_1}{\text{ی} - \text{ی}_2}$$

(۲) اگر $\text{ھ} = \frac{\text{ا ی + ب}}{\text{ج ی + د}}$ اور اگر نقطہ ی کا طریق، نقاط ی_1 اور ی_2 کو ملانے والے وتر پر کے دائرہ کی قوس ہو تو ثابت کرو کہ ھ کا طریق نقاط ھ_1 اور ھ_2 کو ملانے والے وتر پر کے دائرہ کی قوس ہوگی -

(۳) وہ دو خطی بدل معلوم کرو جس سے ی مستوی کے تین نقاط ا، ب، ج، ھ مستوی میں بالترتیب نقاط ۰، ۱، ∞ کے متناظر ہوں -

جواب $\text{ھ} = \frac{\text{ی} - \text{ا}}{\text{ی} - \text{ج}} \times \frac{\text{ب} - \text{ج}}{\text{ب} - \text{ا}}$

(۴) ثابت کرو کہ بدل ھ = $\frac{\text{۱ + خ ی}}{\text{خ + ی}}$ سے حقیقی محور کا وہ حصہ جو ی = ۱ اور ی = -۱ کے درمیان ہے ھ = ۱، اور ھ = -۱ کو ملانے والے نصف دائرہ میں بدل جاتا ہے۔

(۵) اگر ھ = ی² + ۱، تو ثابت کرو کہ جب ی دائرہ |ی| = ج مرتسم کرتا ہے تو ہر ایک نقطہ ھ کیسنی کا بیضوی (Cassinian ovals) ک₁ ک₂ = ج² مرتسم کرتا ہے جہاں ک₁ اور ک₂ ھ سے نقاط +۱ اور -۱ کے فاصلے ہیں۔

(۶) اگر ھ = $\left\{\frac{\text{(۲ + خ) ی + (۳ + ۴ خ)}}{\text{ی}}\right\}$ تو ثابت کرو کہ

(۱) جیسے نقطہ (لا، ما) مثبت سمت ساعت میں دائرہ لا² + ما² = ۱، مرتسم کرتا ہے، نقطہ (ع، و) منفی سمت ساعت میں دائرہ (ع - ۲)² + (و - ۱)² = ۲۵ مرتسم کرتا ہے۔

(۲) جیسے نقطہ (لا، ما) مثبت سمت ساعت میں دائرہ لا² + ما² - ۴ لا - ۶ ما - ۱۲ = صفر مرتسم کرتا ہے نقطہ (ع، و) منفی سمت ساعت میں دائرہ

$$\left(\text{ع} - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(\text{و} - \frac{۱۳}{۱۲}\right)^۲ = \left(\frac{۲۵}{۱۲}\right)^۲$$ مرتسم کرتا ہے۔

(۷) بدل ھ = $\frac{۱}{\text{ی}}$ کے ذریعہ

(۱) نقطہ (ا، ۰) میں سے گذرنے والے خطوں کے نظام

اور (۲) اس نقطہ کو مرکز مان کر کھینچے ہوئے دائروں کے نظام، کے متناظر منحنی معلوم کرو۔ اور دکھاؤ کہ پہلی صورت میں ھ = ۰ اور ھ = $\frac{۱}{\text{ا}}$ میں سے گزرنے والے ہم محور دائروں کا نظام حاصل ہوتا ہے اور دوسری میں ایسے ہم محور دائروں کے نظام حاصل ہوتے ہیں جن کے ھ = ۰ اور ھ = $\frac{۱}{\text{ا}}$، انتہائی نقاط ہیں۔

(۸) ثابت کرو کہ بدل ھ = $\frac{۴}{\text{(ی + ۱)}^۲}$ سے دائرہ |ی| = ۱، مکافی و² = ۴ (۱ - ع) میں

بدل جاتا ہے اور دائرہ کا اندرونی حصہ مکافی کے بیرونی حصہ کے متناظر ہے۔

(۹) اگر ھ = $\frac{۱}{ی}$ اور نقطہ ی، خط ۴ ما = ۳ (لا − ۲) کا وہ حصہ مرتسم کرے جو پہلے ربع میں ہو تو ھ کا راستہ معلوم کرو۔ اسی شکل میں ھ کا راستہ دکھاؤ جبکہ ی خط ۴ ما + ۳ (لا − ۲) = صفر کا وہ حصہ مرتسم کرے جو چوتھے ربع میں ہے۔ ہر ایک صورت میں حرکت کی سمت معلوم کرو۔

جواب۔ دائرہ ۶ ع^2 + ۶ و^2 = ۳ ع ± ۴ و کے وہ حصے جو بالترتیب چوتھے اور پہلے ربع میں ہیں۔

(۱۰) دکھاؤ کہ بدل ھ = $\left(\frac{۲ ی + ۳}{ی - ۴}\right)$ سے دائرہ لا^2 + ما^2 − ۴ لا = صفر۔ خط ۴ ع + ۳ = صفر میں بدل جاتا ہے اور اِس کی تشریح کرو کہ حاصل شدہ منحنی کس وجہ سے دائرہ نہیں ہے۔

(۱۱) ہم شکل تعبیر کی اہم خصوصیات کو بیان کرو۔

(۱۲) اگر ھ = $\left\{\frac{ی - ج}{ی + ج}\right\}^2$ جہاں ج حقیقی اور مثبت ہے، تو ی مستوی کے وہ رقبے معلوم کرو جو ھ مستوی کے اوپر کے نصف کے ہم شکلاً تعبیر ہوتے ہیں۔

جواب (۱) دائرہ |ی| = ج کا نچلا آدھا حصہ (۲) لا محور کے اوپر مستوی کا وہ حصہ جو دائرہ |ی| = ج کے باہر ہے۔

(۱۳) اگر ھ = − خ ج مم $\frac{ی}{۲}$، تو ثابت کرو کہ ی مستوی کا لامتناہی مستطیل جو لا = ۰، لا = π، ما = ۰، ما = ∞ سے گھرا ہوا ہے ھ مستوی کے ایک ربع میں ہم شکلاً تعبیر کیا جا سکتا ہے۔

(۱۴) اگر ھ = جمزی، تو ثابت کرو کہ ی مستوی میں خطوط لا = ۰، لا = ۲، ما = ۰، ما = $\frac{\pi}{۴}$ سے گھرا ہوا خطہ ھ مستوی میں ایسے خطہ میں تحویل ہو جاتا ہے جسکا رقبہ $\frac{(\pi\ \text{جبز}\ ۴ - ۸)}{۱۶}$ ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ رشتہ ھ = خ جبزی سے، ی مستوی کا نیم لاتناہی (Semi-infinite) مستطیل، لا > ۰، $-\frac{\pi}{2} \leq$ ما $< \frac{\pi}{2}$، ھ مستوی کے اوپر کے نصف حصہ سے تعبیر ہوتا ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ اگر ھ = لا + $\frac{\text{خ ب ما}}{\text{ا}}$، ۰ < ا < ب

تو دائرہ لا^2 + ما^2 = ا^2، کا اندرونی حصہ، ھ مستوی میں ناقص کے اندرونی حصہ میں بدل جاتا ہے لیکن یہ بدل ہم شکل بدل نہیں ہے۔

(۱۷) اگر ھ = $\frac{\text{ی (ی} - \sqrt{2})}{1 - \sqrt{2}\ \text{ی}}$ تو |ھ| = ۱ کے متناظری مستوی کے منحنی معلوم کرو۔

(۱۸) ثابت کرو کہ بدل ھ = و$^{\frac{\pi \text{ی}}{\text{و}}}$ سے ھ مستوی کا ایک مساوی الزاویہ لولبی (Equiangular Spiral) ی مستوی میں ایک خط کے متناظر ہوتا ہے۔

(۱۹) اگر ج، حقیقی ہو تو دکھاؤ کہ بدل $\frac{\text{ی} - \text{ج}}{\text{ی} + \text{ج}}$ = خ و$^{\text{غ ھ}}$ سے ھ مستوی کی پٹی، جو و = $-\infty$، و = ∞، ء = صفر، اور ء = π سے گھیری ہوئی ہے، ی مستوی میں دائرہ |ی| ≤ ج میں ہم شکلاً بدل جاتی ہے۔

(۲۰) ثابت کرو کہ رشتہ ھ^2 = ۱ + و$^{\text{ی}}$ سے خطوط لا = مستقل، ھ مستوی میں (Lemniscates) میں بدل جاتی ہے۔

(۲۱) اگر ی = (لا + خ ما)، تو ثابت کرو کہ مکافی ما^2 = ۴ ج^2 (لا + ج^2) کا اندرونی حصہ، بدل ھ = خ جز $\frac{\pi \sqrt{\text{ی}}}{\text{۲ ج}}$ سے ھ مستوی کے اوپر کے حصہ میں بدل جاتا ہے۔

(۲۲) ثابت کرو کہ بدل ھ(ی + خ)^2 = ۱ سے ی مستوی کے دائرہ |ی| = ۱ کا اندرونی حصہ، ھ مستوی میں مکافی ۲ ر (۱ - جم ف) = ۱ کے بیرونی حصہ میں

بدل جاتا ہے جہاں م، فہ مستوی کے اندر کسی نقطہ کے قطبی محدد ہیں۔

(۲۳) ثابت کرو کہ بدل $\text{ھ} = \left(\frac{\text{ی} + \text{خ}}{\text{ی} - \text{خ}} + ۱\right)^{۲}$ سے ی مستوی کا حقیقی محور، ھ مستوی میں صنوبری میں بدل جاتا ہے۔ ی مستوی کا وہ حصہ معلوم کرو جو صنوبری کے اندرونی حصہ کے متناظر ہے۔

(۲۴) بدل $۲\,\text{ی} = \text{ھ} + \frac{۱}{\text{ھ}}$ پر غور کرو۔

باب ہفتم

ملتف تکمل اور کوشی کا مسئلہ

ملتف متغیروں کے تفاعلوں کے محدود تکملہ کی تعریف منحنی تکملوں کی مدد سے
کی جاتی ہے اس لیے ہم پہلے منحنی تکملہ کی تعریف دینگے۔

۳۴ - منحنی تکملہ ——

مستوی (لا، ما) میں دو نقطوں ا اور ب کو ملانے والے منحنی گ پر
غور کرو (شکل ۳۰) اس منحنی کو مقطوعوں ا ل، ل م، م ن ...... میں

شکل (۳۰)

اِس طرح تقسیم کرو کہ ان میں سے ہر مقطوعہ کے لیے، لا کی ایک قیمت کے جواب میں ما کی صرف ایک قیمت حاصل ہو اور اِس طرح ہر مقطوعہ میں ما، لا کا یک قیمتی مسلسل تفاعل ہو، اِن تفاعلوں کو فہ (لا)، فہ۲ (لا)، فہ۳ (لا) .... سے ظاہر کرو

اب فرض کرو کہ ف (لا، ما) مستوی کے اُس خطہ کے اندر جس میں راستہ گ ہے لا اور ما کا یک قیمتی تفاعل ہے۔

تب تفاعل ف {لا، فہ۱ (لا)}، ف {لا، فہ۲ (لا)}، ف {لا، فہ۳ (لا)} ....

بالترتیب قوسوں ال، ل م، م ن .... پر لا کے یک قیمتی مسلسل تفاعل ہیں اور تکملے

∫ ف {لا، فہ۱ (لا)} ڈلا، ∫ ف {لا، فہ۲ (لا)} ڈلا، ∫ ف {لا، فہ۳ (لا)} ڈلا ....

جہاں ا، ل، م، ن .... ب، وغیرہ ا، ل، م، ن، .... ب کے معین ہیں سادے محدود تکملے ہیں۔ یہ منحنی تکملے ہیں۔

∫ ف (لا، ما) ڈلا، ∫ ف (لا، ما) ڈلا، ∫ ف (لا، ما) ڈلا ....

(حدود: ال، ل م، م ن)

اور اِن کا مجموعہ منحنی تکملہ ∫_گ ف (لا، ما) ڈلا ہے

اسی طرح سے گ کو متعدد مقطوعوں میں تقسیم کرنے سے جن میں سے ہر ایک میں لا، ما کا یک قیمتی تفاعل ہے۔ ہم منحنی تکملہ ∫_گ سہ (لا، ما) ڈما کی تعریف کر سکتے ہیں۔ اِن کو ملانے سے ایک تیسری قسم کا منحنی تکملہ

∫_گ {ف (لا، ما) ڈلا + سہ (لا، ما) ڈما} حاصل ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱ ۔ اگر لا اور ما متبدل ت کے یک قیمتی تفاعل ہوں تو تکملہ ہوجاتا ہے ۔

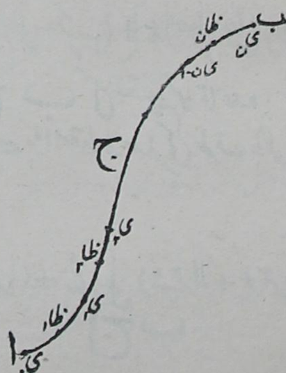
$$\int_{\text{ت}_0}^{\text{ت}_1} \left\{ \text{ف}(\text{لا، ما}) \frac{\text{ولا}}{\text{وت}} + \text{س}(\text{لا، ما}) \frac{\text{وما}}{\text{وت}} \right\} \text{وت}$$

جہاں ت_0 اور ت_1 ، گ کے ابتدائی اور آخری نقطوں کے متناظر ہیں ۔

نتیجہ صریح ۲ ۔ اگر گ بند منحنی ہو تو تکملہ کی قیمت ابتدائی نقطہ کے مقام پر منحصر نہیں ہوتی لیکن اس کی علامت منحنی کی مرتسم شدہ سمت پر منحصر ہوتی ہے ۔

۳۵ ۔ ملتف متغیر کا محدود تکملہ

فرض کرو کہ ف(ی) = (ع + خ و)، ملتف متغیری = (لا + خ ما) کا یک قیمتی مسلسل تفاعل ہے ۔ نیز فرض کرو کہ جس خطہ کے اندر ف(ی) یک قیمتی اور مسلسل ہے، اُس کے اندر نقاط ی_0 اور ی کو ملانے والا منحنی ا ج ب (شکل ۳۱) ہے ۔



شکل (۳۱)

فرض کرو کہ اِس خط پر $ی_۱$، $ی_۲$ ...... $ی_ن$ نقطے ترتیب وار لیے گئے ہیں جہاں $ی_ن$، نقطہ ی ہے۔

نیز منقطعوں $(ی_۰، ی_۱)$، $(ی_۱، ی_۲)$ ...... $(ی_{ن-۱}، ی_ن)$ پر اختیاری نقاط $ظا_۱$، $ظا_۲$، $ظا_۳$ ...... $ظا_ن$ ہیں

مجموعہ $س_ن = \sum_{ر=۱}^{ن} ف(ظا_ر)(ی_ر - ی_{ر-۱})$ پر غور کرو

جہاں $ظا_ر = صا_ر + خ\, عا_ر$

$$= \sum_{ر=۱}^{ن} \{ع(صا_ر، عا_ر) + خ\, و(صا_ر، عا_ر)\}\{(لا_ر + خ\, ما_ر) - (لا_{ر-۱} + خ\, ما_{ر-۱})\}$$

$$= \sum_{ر=۱}^{ن} \{ع(صا_ر، عا_ر) + خ\, و(صا_ر، عا_ر)\}\{(لا_ر - لا_{ر-۱}) + خ(ما_ر - ما_{ر-۱})\}$$

$س_ن$ کے حقیقی اور خیالی حصوں کو الگ کرنے سے

$$س_ن = \sum_{ر=۱}^{ن} \{ع(صا_ر، عا_ر)(لا_ر - لا_{ر-۱}) - و(صا_ر، عا_ر)(ما_ر - ما_{ر-۱})\}$$

$$+ خ \sum_{ر=۱}^{ن} \{و(صا_ر، عا_ر)(لا_ر - لا_{ر-۱}) + ع(صا_ر، عا_ر)(ما_ر - ما_{ر-۱})\}$$

اب اگر منحنی اج ب کی تقسیم کا قاعدہ اِس طرح بدلے کہ ن لا متناہی کی طرف مائل ہو اور سب سے بڑا منقطعہ صفر کی طرف مائل ہو تو یہ آخری جملہ، منحنی تکملوں کی تعریف کی رو سے

$$\int_{اج ب} (ع\, ڈلا - و\, ڈما) + خ \int_{اج ب} (و\, ڈلا + ع\, ڈما)$$

یا $\int_{اج ب} (ع + خ\, و)(ڈلا + خ\, ڈما)$ کی طرف مائل ہوتا ہے۔

س ن کی اس انتہائی قیمت کو ف (ی) کا منحنی ا ج ب کے گرد لیا ہوا تکملہ کہتے ہیں اور اس کو لکھتے ہیں۔

∫ ف (ی) ڈی
ا ج ب

منحنی ا ج ب کو **تکمل کا راستہ** کہتے ہیں۔

اگر تکمل کا راستہ ایک بند منحنی گ ہو تو تکملہ کو **گھیرا تکملہ** (Contour integral) کہتے ہیں۔

گھیرے تکملہ کی بعض مشہور خاصیتیں - اِن کو گھیرے تکملہ کے تعریف کی مدد سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(۱) ∫ ف (ی) ڈی = - ∫ ف (ی) ڈی
ب ج ا ا ج ب

(۲) ∫ ف (ی) ڈی + ∫ ف (ی) ڈی = ∫ ف (ی) ڈی
ا ج ج ب ا ج ب

(۳) ∫ { ف۱ (ی) + ف۲ (ی) + ... + فن (ی) } ڈی
ا ج ب

= ∫ ف۱ (ی) ڈی + ∫ ف۲ (ی) ڈی + ∫ ف۳ (ی) ڈی + ... + ∫ فن (ی) ڈی
ا ج ب ا ج ب ا ج ب ا ج ب

(۴) ∫ ک ف (ی) ڈی = ک ∫ ف (ی) ڈی ، جہاں ک ایک مستقل ہے
ا ج ب

(۵) $\int_{\text{اج ب}}$ ف(ی) دی = $\int_{\text{عہ جہ بہ}}$ ف {فہ(ظا)} فہَ(ظا) دظا، جہاں فہ(ظا)

ظا کا تحلیلی تفاعل ہے اور ی مستوی کا راستہ اج ب، ظا مستوی میں راستہ عہ جہ بہ کے متناظر ہے۔

(۶) تکملہ کا مقیاس محدود ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ اج ب پر ف(ی) کی اعظم قیمت م ہے، تب چونکہ

$$|\text{اس}_{\text{ن}}| \leqslant \sum_{\text{ہ}=1}^{\text{ن}} |\text{ف(ظہ)}|\,|\text{یہ} - \text{یہ}_{-1}| \leqslant \text{م} \sum_{\text{ہ}=1}^{\text{ن}} |\text{یہ} - \text{یہ}_{-1}|$$

$\left|\int_{\text{اج ب}} \text{ف(ی) دی}\right| \leqslant$ م ل، جہاں ل، اج ب کا طول ہے۔

۳۶۔ گرین کا مسئلہ

فرض کرو کہ تفاعل ف(لا، ما) اور ق(لا، ما) سادہ طور پر ملے ہوئے خطہ کے اندر جس میں ایک بند منحنی گ ہے، ایک قیمتی اور مسلسل ہیں اور ان کے تفرقی سرے بھی مسلسل ہیں۔

دوہرے تکملہ ∫∫ (− جف ف / جف ما + جف ق / جف لا) ورلا ورما پر غور کرو جو گ سے گھیرے ہوئے سادہ طور پر ملے ہوئے خطہ پر لیا گیا ہے۔

اولاً فرض کرو کہ گ (شکل ۳۲) ایک ایسا منحنی ہے کہ کسی محور کے متوازی کوئی خط اس کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کرتا۔ فرض کرو کہ لا کی کسی قیمت کے جواب میں منحنی گ پر ما کی دو قیمتیں ما۱ اور ما۲ (ما۲ > ما۱) ہیں اور ا اور ب منحنی گ پر اقل اور اعظم فصلے لا۱ اور لا۲ والے نقطے ہیں۔ تب

− ∫∫ جف ف / جف ما ورلا ورما = − ∫ (لا۱ سے لا۲ تک) {ف (لا، ما۲) − ف (لا، ما۱)} ورلا

آخری جملہ دو منحنی تکملوں − ∫ (اقب) ف (لا، ما) ورلا، ∫ (افب) ف (لا، ما) ورلا کا مجموعہ ہے

اور اس لیے، چونکہ − ∫ (اقب) ف (لا، ما) ورلا = ∫ (بقا) ف (لا، ما) ورلا

اس لیے − ∫∫ جف ف / جف ما ورلا ورما = ∫ (گ) ف (لا، ما) ورلا

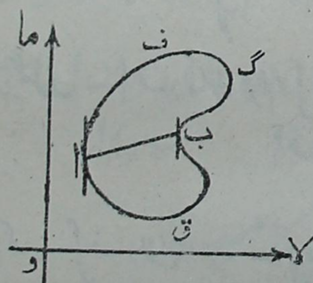
جہاں تکملہ گ پر مثبت سمت ساعت میں لیا گیا ہے۔

اسی طرح سے ∫∫ جف ق / جف لا ورلا ورما = ∫ (گ) ق (لا، ما) ورما

اس لیے گرین کا مسئلہ ∫∫ (− جف ف / جف ما + جف ق / جف لا) ورلا ورما = ∫ (گ) (ف ورلا + ق ورما)

خطہ زیر بحث کے لیے درست ہے۔

یہ مسئلہ دوہرے تکملہ اور منحنی تکملہ میں اہم رشتہ کو بیان کرتا ہے۔
پھر فرض کرو کہ اگر گ اس شرط کو پورا نہ کرے کہ کسی محور کے متوازی کوئی خط اس کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کرتا تو اس خطہ کو ایسے خطوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن میں سے ہر ایک اس شرط کو پورا کرتا ہے۔ مثلاً شکل (۳۳) میں اگر نقاط ا اور ب کو جن پر کے مماس ما محور کے متوازی ہیں، ایک خط کے ذریعہ ملایا جائے تو اس طرح سے جو دو رقبے حاصل ہوتے ہیں وہ مطلوبہ خطے ہیں۔



شکل (۳۳)

اس لیے $\iint \left(- \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ق}}{\text{جف لا}} \right)$ ورلا ورما

$= \int$ (ف ورلا + ق ورما) + $\int$ (ف ورلا + ق ورما)

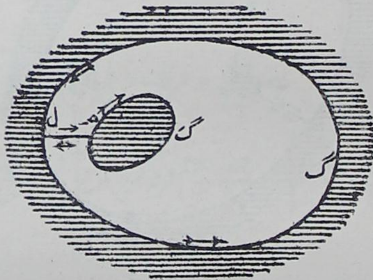
اق ب ا　　　　اب ف ا

$= \int_{\text{گ}}$ (ف ورلا + ق ورما)، چونکہ اب اور ب ا پر لیے گئے تکملوں کا مجموعہ صفر ہے۔

اسی طرح سے یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ مسئلہ سادہ طور پر ملے ہوئے

تمام خطّوں کے لیے جو بند منحنیوں سے محدود ہیں، درست ہے۔

ضعفی طور پر ملے ہوئے خطّے ——— منحنیوں گ اور گَ {شکل (۳۴)} کے درمیانی خطّوں پر غور کرو۔ اِس خطّہ کو گ سے گَ تک خط ل م کھینچنے سے سادہ طور پر مِلا ہوا خطہ بنایا جاسکتا ہے۔



شکل (۳۴)

اِس لیے ∬ (− جف ف / جف ما + جف ق / جف لا) ورلا ورما = ∫

∫ گ (ف ورلا + ق ورما) + ∫ ل م (ف ورلا + ق ورما)

− ∫ گَ (ف ورلا + ق ورما) + ∫ م ل (ف ورلا + ق ورما)

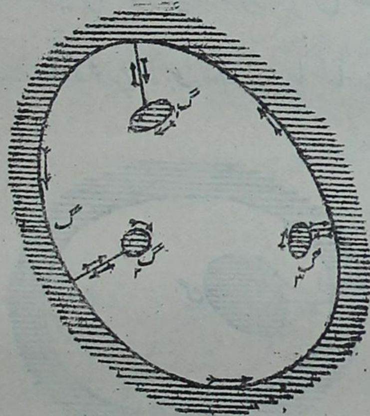
= ∫ گ (ف ورلا + ق ورما) − ∫ گَ (ف ورلا + ق ورما)

جہاں دوسرے تکملہ کو گَ کے گرد مثبت سمت ساعت میں لیا گیا ہے۔

اِسی طرح سے اُس خطّہ کے لیے جو منحنی گ (شکل ۳۵) اور ان منحنیوں

$گ_۱$، $گ_۲$، …… $گ_ن$ کے درمیان ہے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\iint_{گ} \left(-\frac{جف\,ف}{جف\,ما} + \frac{جف\,ق}{جف\,لا} \right) ورلا\,ورما = \int_{گ} (ف\,ورلا + ق\,ورما) - \sum_{ہ=۱}^{ن} \int_{گ_ہ} (ف\,ورلا + ق\,ورما)$$



شکل (۳۵)

مثال (۱) اگر ف ورلا + ق ورما، کامل تفرقہ ہو تو ثابت کرو کہ

$\int_{گ} (ف\,ورلا + ق\,ورما) =$ صفر، جہاں گ بند منحنی ہے۔

چونکہ ف ورلا + ق ورما کامل تفرقہ ہے اس لیے $\frac{جف\,ف}{جف\,ما} = \frac{جف\,ق}{جف\,لا}$

گرین کے مسئلے سے $\int (ف\,ورلا + ق\,ورما) = \iint \left(-\frac{جف\,ف}{جف\,ما} + \frac{جف\,ق}{جف\,لا} \right) ورلا\,ورما$

$= \iint \left(-\frac{جف\,ف}{جف\,ما} + \frac{جف\,ف}{جف\,ما} \right) ورلا\,ورما =$ صفر

۲۷- کوشی کا تکملی مسئلہ

اگر تفاعل ف(ی)، سادہ طور پر ملے ہوئے خطے ا میں تحلیلی ہو اور گ ایک بند گھیرا ہو جو بالتمام ا میں واقع ہو تو ∫گ ف(ی) فری = صفر

فرض کرو کہ ف(ی) = (ع + خ و)

تب ∫گ ف(ی) فری = ∫گ (ع + خ و) (فرلا + خ فرما)

= ∫گ (ع فرلا − و فرما) + خ ∫گ (و فرلا + ع فرما)

گرین کے مسئلہ سے = ∬ا (− جف ع/جف ما − جف و/جف لا) فرلا فرما + خ ∬ا (− جف و/جف ما + جف ع/جف لا) فرلا فرما

اب چونکہ ف(ی) تحلیلی ہے اس لیے کوشی ریمان مساواتوں کی رو سے

جف ع/جف لا = جف و/جف ما اور جف ع/جف ما = − جف و/جف لا

اِن قیمتوں کو اوپر کے دوہرے تکملہ میں درج کرنے سے

∫گ ف(ی) فری = ∬ا (جف و/جف لا − جف و/جف لا) فرلا فرما + ∬ا (− جف و/جف ما + جف و/جف ما) فرلا فرما

= صفر

مثال (۲) تکملہ ∫گ فری/(ی+۲) سے جہاں گ، دائرہ |ی| = ۱ کو تعبیر کرتا ہے اخذ کرو کہ

∫ (از ۰ تا π) (۱ + ۲ جم طہ)/(۵ + ۴ جم طہ) فرطہ = صفر

تفاعل $\frac{1}{\text{ی}+۲}$ کا صرف ایک قطب نقطہ ی = ‎-۲ پر ہے اور یہ نقطہ دائرہ $|\text{ی}| = ۱$ کے باہر ہے اس لیے گھیرا $|\text{ی}| = ۱$ کے اندر دیا ہوا تفاعل تحلیلی ہے اس لیے کوشی کے مسئلہ سے۔

$$\int_{\text{گ}} \frac{\text{دی}}{\text{ی}+۲} = \text{صفر}$$

دوسرے حصے کے لیے درج کرو $\text{ی} = \text{ر}\,\text{قو}^{\text{خ طہ}}$ جہاں $\text{ر} = ۱$، اور طہ، صفر سے ۲π تک بدلتا ہے۔

$$\text{تب ی} = \text{قو}^{\text{خ طہ}}\text{،}\quad \text{دی} = \text{خ}\,\text{قو}^{\text{خ طہ}}\,\text{دطہ}$$

$$\text{اس لیے}\int_{\text{گ}} \frac{\text{دی}}{\text{ی}+۲} = \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\text{خ}\,\text{قو}^{\text{خ طہ}}}{\text{قو}^{\text{خ طہ}}+۲}\,\text{دطہ} = \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\text{خ}\,\text{قو}^{\text{خ طہ}}(۲+\text{قو}^{-\text{خ طہ}})}{(۲+\text{قو}^{\text{خ طہ}})(۲+\text{قو}^{-\text{خ طہ}})}\,\text{دطہ}$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\text{خ}\,\text{قو}^{\text{خ طہ}}(۲+\text{قو}^{-\text{خ طہ}})}{۴+۱+۲(\text{قو}^{\text{خ طہ}}+\text{قو}^{-\text{خ طہ}})}\,\text{دطہ}$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\text{خ}(\text{جم طہ}+\text{خ جب طہ})(۲+\text{جم طہ}-\text{خ جب طہ})}{۵+۴\,\text{جم طہ}}\,\text{دطہ}$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \frac{\text{خ}\{(۲\,\text{جم طہ}+\text{جم}^{۲}\text{طہ}+\text{جب}^{۲}\text{طہ})+\text{خ}(۲\,\text{جب طہ}+\text{جب طہ جم طہ}-\text{جم طہ جب طہ})\}}{۵+۴\,\text{جم طہ}}\,\text{دطہ}$$

$$= \int_{۰}^{۲\pi} \frac{(۲\,\text{جم طہ}+۱)\,\text{خ}-۲\,\text{جب طہ}}{۵+۴\,\text{جم طہ}}\,\text{دطہ}\ .$$

لیکن $\int_{|\text{ی}|=1} \frac{\text{وری}}{\text{ی}+\text{۲}}$ = صفر، اس لیے $\int_{\text{ب}}^{\text{۲}\pi} \frac{(\text{۲ جم طہ}+\text{۱})\,\text{خ} - \text{۲ جب طہ}}{\text{۵}+\text{۴ جم طہ}}$ = صفر

اِس تکملہ کے خیالی حصہ کو دونوں طرف مساوی رکھنے سے

$$\int_{\text{ب}}^{\text{۲}\pi} \frac{\text{۱}+\text{۲ جم طہ}}{\text{۵}+\text{۴ جم طہ}} = \text{صفر}$$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ اگر فہ (۲ ا − لا) = فہ (لا) تو

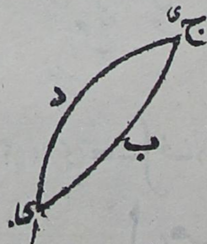
$$\int_{\text{ب}}^{\text{۲ا}} \text{فہ(لا) ولا} = \text{۲}\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{فہ(لا) ولا}$$

اس لیے $\int_{\text{ب}}^{\text{۲}\pi} \frac{\text{۱}+\text{۲ جم طہ}}{\text{۵}+\text{۴ جم طہ}} = \text{۲}\int_{\text{ب}}^{\pi} \frac{\text{۱}+\text{۲ جم طہ}}{\text{۵}+\text{۴ جم طہ}}$ = صفر

یعنی $\int_{\text{ب}}^{\pi} \frac{\text{۱}+\text{۲ جم طہ}}{\text{۵}+\text{۴ جم طہ}}$ = صفر

حسب ذِیل مسئلے کوشی کے مسئلہ کی مدد سے فوراً حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ (۱) فرض کرو کہ ف (ی)، سادہ طور پر ملے ہوئے خطّہ میں تحلیلی ہے اور فرض کرو کہ ی. اور ی کو ملانے والے راستے ا ب ج (شکل ۳۶) اور



شکل (۳۶)

ا د ج بالتمام اس خطہ کے اندر واقع ہیں۔ تب

$$\int_{\text{ابج}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} + \int_{\text{جدا}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} = \text{صفر}$$

اس لیے

$$\int_{\text{ابج}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} = \int_{\text{ادج}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی}$$

اس لیے تکملہ راستہ پر منحصر نہیں ہے جب تک کہ راستہ بالتمام اس خطہ کے اندر ہے بلکہ سمت پر منحصر ہے۔

مسئلہ (۲) فرض کرو کہ ف(ی) منحنی گ اور گ' (شکل ۳۴) سے گھیرے ہوئے حلقہ نما فضا میں تحلیلی ہے۔

تب

$$\int_{\text{گ}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} = \int_{\text{گ}'} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی}$$

جبکہ دونوں صورتوں میں تکمل کا عمل ایک ہی سمت میں کیا گیا ہے۔
کیونکہ کوشی کے مسئلہ سے

$$\int_{\text{گ}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} + \int_{\text{لم}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} - \int_{\text{گ}'} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} + \int_{\text{مل}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} = \text{صفر}$$

لیکن

$$\int_{\text{مل}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی} = -\int_{\text{لم}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{وی}$$

$$\text{اس لیے}\quad \int_{\text{گ}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{ڈی} = \int_{\text{گ}'} \text{ف}(\text{ی})\,\text{ڈی}$$

اسی طرح سے اگر ف(ی)، گ اور منحنیوں گ_1، گ_2، ......، $\text{گ}_{\text{ن}}$ (شکل ۳۵) کے اندر تحلیلی ہو تو یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

$$\int_{\text{گ}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{ڈی} = \sum_{\text{م}=1}^{\text{ن}} \int_{\text{گ}_{\text{م}}} \text{ف}(\text{ی})\,\text{ڈی}$$

مسئلہ (۳) اگر منحنی گ کے اندر، ا کوئی نقطہ ہو تو

$$\int_{\text{گ}} \frac{\text{ڈی}}{\text{ی} - \text{ا}} = 2\pi\,\text{خ}$$

ثبوت ۔ ا کے گرد نصف قطر ر والا ایک چھوٹا دائرہ ج کھینچو تب مسئلہ ۲ سے ۔

$$\int_{\text{گ}} \frac{\text{ڈی}}{\text{ی} - \text{ا}} = \int_{\text{ج}} \frac{\text{ڈی}}{\text{ی} - \text{ا}}$$

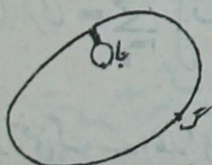
دائرہ ج پر فرض کرو کہ $(\text{ی} - \text{ا}) = \text{ر}\,\text{و}^{\text{خ ط}}$، تب $\text{ڈی} = \text{ر}\,\text{و}^{\text{خ ط}} \times \text{خ}\,\text{ڈط}$ اسلیے

$$\int_{\text{گ}} \frac{\text{ڈی}}{\text{ی} - \text{ا}} = \int_{\text{ب}}^{2\pi} \frac{\text{ر}\,\text{و}^{\text{خ ط}} \times \text{خ}\,\text{ڈط}}{\text{ر}\,\text{و}^{\text{خ ط}}} = \int_{\text{ب}}^{2\pi} \text{خ}\,\text{ڈط} = 2\pi\,\text{خ}$$

مسئلہ (۴) اگر ف(ی) ایک بند گھیرے گ کے اندر اور اوپر تحلیلی ہو، اور اس گھیرے گ کے اندر ایک نقطہ ظا ہو تو

$$\frac{1}{2\pi\,\text{خ}} \int_{\text{گ}} \frac{\text{ف}(\text{ی})\,\text{ڈی}}{\text{ی} - \text{ظا}} = \text{ف}(\text{ظا})$$

نقطہ ی = ظا کے گرد ایک چھوٹا دائرہ (شکل ۳۷) جا جس کا نصف قطر
له ہو، گھیرا گ کے اندر کھینچو جو بالتمام اِس گھیرے کے اندر ہو۔ خطوں گ اور
جا کے درمیانی رقبہ میں تفاعل فہ (ی) = $\frac{\text{ف (ی)}}{\text{ی - ظا}}$ تحلیلی ہے۔



شکل (۳۷)

جا پر کے کسی نقطہ کو، گ پر کے کسی نقطہ سے ملانے سے ہم ایک
ترچھی کاٹ لیتے ہیں۔ اِس طرح سے ہم کو ایک بند گھیرا "گا" ملتا ہے
جس کے اندر فہ (ی) تحلیلی ہے۔ تب کوشی کے مسئلہ سے

$$\int_{\text{گا}} \text{فہ (ی) ڈی} = \text{صفر}$$

نیز گا کے گرد مخالف سمت ساعت میں چکر لگانے سے، ترچھی کاٹ پر
سے دو دفعہ گزرنا پڑتا ہے۔ ہر ایک صورت میں گزرنے کی سمت مخالف
ہے اِس لیے اس پر لیا ہوا تکملہ صفر کے مساوی ہے اور ہمیں حاصل
ہوتا ہے۔

$$\int_{\text{گ}} \text{فہ (ی) ڈی} - \int_{\text{جا}} \text{فہ (ی) ڈی} = \text{صفر}$$

$$\text{اب}\quad \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{جا}} \text{فہ(ی) فری} = \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{جا}} \frac{\text{ف(ی) فری}}{\text{ی} - \text{ظا}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{جا}} \frac{\text{ف(ظا) فری}}{\text{ی} - \text{ظا}} + \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{جا}} \frac{\text{ف(ی)} - \text{ف(ظا)}}{\text{ی} - \text{ظا}}\,\text{فری} \quad \ldots(1)$$

اب جا پر، $(\text{ی} - \text{ظا}) = \text{لہ}\ \text{و}^{\text{خ ط}}$

$$\text{اس لیے}\quad \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{جا}} \frac{\text{ف(ظا) فری}}{\text{ی} - \text{ظا}} = \frac{\text{ف(ظا)}}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{جا}} \frac{\text{فری}}{\text{ی} - \text{ظا}}$$

$$= \frac{\text{ف(ظا)}}{2\pi\,\text{خ}}\int_{0}^{2\pi} \frac{\text{لہ خ و}^{\text{خ ط}}\ \text{فرطہ}}{\text{لہ و}^{\text{خ ط}}} = \frac{\text{ف(ظا)}}{2\pi\,\text{خ}} \times 2\pi\,\text{خ} = \text{ف(ظا)}$$

$$\text{نیز دوسری رقم}\quad \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{جا}} \frac{\text{ف(ی)} - \text{ف(ظا)}}{\text{ی} - \text{ظا}}\,\text{فری}\quad \text{کا مقیاس}$$

$$\frac{1}{2\pi\,\text{لہ}}\ \underset{\text{جا}}{\text{اعظم}} \left|\text{ف(ی)} - \text{ف(ظا)}\right| \cdot 2\pi\,\text{لہ}\ \text{سے بڑا نہیں ہو سکتا۔}$$

اب چونکہ ی = ظا پر، ف(ی) مسلسل ہے اس لیے یہ جملہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ لہ ← صفر جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

یعنے کوشی کے مسئلہ کی مدد سے ہم ایک بند گھیرے کے اندر کسی نقطہ پہ تفاعل ف(ی) کی قیمت کو جس کے اندر تفاعل ف(ی) تحلیلی ہے اُس گھیرے کے گرد لیے ہوئے ایک تکملہ کی شکل میں بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ (۵) اگر ف(ی) ایک علاقہ د میں تحلیلی ہو، اور د کے اندر

اگر گ کوئی بند منحنی ہو جو نقطہ ی = ظا کو گھیرتا ہے تو ف (ی) کا تفرقی سر نقطہ ظا پر -

$$\text{ف}'(\text{ظا}) = \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int \frac{\text{ف}(\text{ی})\,\text{وی}}{(\text{ی} - \text{ظا})^2}$$ سے ملتا ہے۔

مسئلہ (۴) سے $\frac{\text{ف}(\text{ظا}+\text{ھ}) - \text{ف}(\text{ظا})}{\text{ھ}} = \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int \frac{1}{\text{ھ}}\left(\frac{1}{\text{ی}-\text{ظا}-\text{ھ}} - \frac{1}{\text{ی}-\text{ظا}}\right)\text{ف}(\text{ی})\,\text{وی}$

$$= \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{گ}} \left\{\frac{\text{ف}(\text{ی})}{(\text{ی}-\text{ظا})^2} + \frac{\text{ھ}\,\text{ف}(\text{ی})}{(\text{ی}-\text{ظا})^2(\text{ی}-\text{ظا}-\text{ھ})}\right\}\text{وی}$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int_{\text{گ}} \frac{\text{ف}(\text{ی})\,\text{وی}}{(\text{ی}-\text{ظا})^2} + \text{ع}$$

اب اگر یہ ثابت کیا جائے کہ $|\text{ع}| \to 0$ جبکہ $\text{ھ} \to 0$ تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔
چونکہ ف (ی)، گھیر اگ پر اور اِس کے اندر تحلیلی ہے اِس لیے یہ محدود ہے۔ فرض کرو کہ اِس کی علوی حد م ہے۔

تب $|\text{ف}(\text{ی})| \leq \text{م}$ گھیر اگ پر

فرض کرو کہ گھیر اگ سے نقطہ ظا تک کے فاصلہ کی سفلی حد ج ہے۔

فرض کرو کہ ھ کو ہم اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ $|\text{ھ}| < \frac{1}{2}\text{ج}$

تب $|\text{ع}| < \frac{|\text{ھ}|}{2\pi}\,\frac{\text{م}\,\text{ل}}{\text{ج}^2 \times \frac{1}{2}\text{ج}}$ جہاں ل گھیر اگ کا طول ہے۔

اور یہ ظاہر ہے کہ $|\text{ع}| \to$ صفر جبکہ $\text{ھ} \to$ صفر

پس ثابت ہوا کہ

$$\text{ف}'(\text{ظا}) = \frac{1}{2\pi\,\text{خ}}\int \frac{\text{ف}(\text{ی})\,\text{وی}}{(\text{ی} - \text{ظا})^2}$$

مسئلہ (۶) اگر ف (ی) علاقہ د میں تحلیلی ہو، تو علاقہ د کے ہر نقطہ

ظا پر ف (ی) کے تمام رتبہ کے تفرقی سر وجود رکھتے ہیں، جن کی قیمتیں مساوات

$ف^{(ن)}(ظا) = \frac{|ن}{۲\pi خ} \int \frac{ف(ی)\, فری}{(ی - ظا)^{ن+۱}}$ سے ملتی ہیں، جہاں $ف^{(ن)}$، ف کے ن ویں رتبہ کے تفرقی سر کو تعبیر کرتا ہے۔

اگر ہم یہ مان لیں کہ یہ مسئلہ ن = م کے لیے درست ہے تو جملہ

$\frac{ف^{(م)}(ظا + ﻫ) - ف^{(م)}(ظا)}{ﻫ}$ پر غور کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ جملہ $\frac{|م+۱}{۲\pi خ}\int_{گ} \frac{ف(ی)\, فری}{(ی-ظا)^{م+۲}} + ع$ کے مساوی ہے۔

مسئلہ (۴) کی طرح یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ |ع| مائل بہ صفر ہوتا ہے جبکہ |ﻫ| مائل بہ صفر ہے۔ طالب علم بطور مشق کے اس کو خود کرے۔

مسئلہ (۷) ٹیلر کا مسئلہ (Taylor's theorem)

اگر ف (ی)، دائرہ $|ی - ا| \leq ں$ میں تحلیلی ہو اور ظا ایک ایسا نقطہ ہو کہ $|ظا - ا| = ر \; (< ں)$

تب $ف(ظا) = \sum_{ن=0}^{\infty} ا_ن (ظا - ا)^ن$ جہاں $ا_ن = \frac{ف^{(ن)}(ا)}{|ن}$

فرض کرو کہ گ، مرکز ی = ا اور نصف قطر رَ والا دائرہ ہے، جہاں $ر < رَ < ں$

حسب ذیل مساوات متماثلہ پر غور کرو۔

$$\frac{1}{ی - ظا} = \frac{1}{ی - ا} + \frac{ظا - ا}{(ی-ا)^2} + \cdots + \frac{(ظا-ا)^{ن-1}}{(ی-ا)^ن} + \frac{(ظا-ا)^ن}{(ی-ا)^ن}\cdot\frac{1}{ی-ظا}$$

ہر ایک رقم کو $\frac{ف(ی)}{۲\pi خ}$ سے ضرب دو اور گ کے گرد تکمل کرو۔

$$\frac{1}{2\pi\text{خ}}\int_{\text{گ}}\frac{\text{ف}(\text{ی})}{\text{ی}-\text{ظا}}\,\text{وری} = \frac{1}{2\pi\text{خ}}\int_{\text{گ}}\frac{\text{ف}(\text{ی})\,\text{وری}}{\text{ی}-\text{ا}} + \frac{1}{2\pi\text{خ}}\int_{\text{گ}}\frac{(\text{ظا}-\text{ا})\,\text{ف}(\text{ی})\,\text{وری}}{(\text{ی}-\text{ا})^{2}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2\pi\text{خ}}\int_{\text{گ}}\frac{(\text{ظا}-\text{ا})^{\text{ن}-1}\,\text{ف}(\text{ی})\,\text{وری}}{(\text{ی}-\text{ا})^{\text{ن}}} + \frac{1}{2\pi\text{خ}}\int_{\text{گ}}\frac{(\text{ظا}-\text{ا})^{\text{ن}}\,\text{ف}(\text{ی})}{(\text{ی}-\text{ا})^{\text{ن}}(\text{ی}-\text{ظا})}\,\text{وری}$$

$$\text{ف}(\text{ظا}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{فَ}(\text{ا})(\text{ظا}-\text{ا}) + \cdots + \frac{\text{ف}^{\text{ن}-1}(\text{ا})}{\underline{|\text{ن}-1}}\,(\text{ظا}-\text{ا})^{\text{ن}-1} + \text{ر}_{\text{ن}}$$

$$\text{جہاں } \text{ر}_{\text{ن}} = \frac{(\text{ظا}-\text{ا})^{\text{ن}}}{2\pi\text{خ}}\int_{\text{گ}}\frac{\text{ف}(\text{ی})\,\text{وری}}{(\text{ی}-\text{ا})^{\text{ن}}(\text{ی}-\text{ظا})}$$

یہ ٹیلر کا مسئلہ معہ باقی ہے۔

اب فرض کرو کہ $|\text{ف}(\text{ی})|$ کی گ پر اعظم قیمت م ہے تب

$|\text{ف}(\text{ی})| \leq \text{م}$ گ پر

$$\text{اس لیے } |\text{ر}_{\text{ن}}| \leq \frac{\text{ر}^{\text{ن}}}{2\pi}\,\frac{2\pi\,\text{رَ}\,\text{م}}{\text{رَ}^{\text{ن}}(\text{رَ}-\text{ر})} = \text{ک}\left(\frac{\text{ر}}{\text{رَ}}\right)^{\text{ن}}$$

جہاں ک ایک مستقل ہے جو ن پر منحصر نہیں ہے۔

اب چونکہ $\text{ر} < \text{رَ}$، اس لیے $|\text{ر}_{\text{ن}}| \to$ صفر جبکہ $\text{ن} \to \infty$

اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ سلسلہ $\sum_{0}^{\infty} \text{ا}_{\text{ن}}(\text{ظا}-\text{ا})^{\text{ن}}$، متدق ہے۔

۳۸ - باقی کی تعریف (Definition of a residue)

اگر ایک بند گھیرے گ کے اندر ف(ی) کی صرف ایک نادریت

نقطہ ی = ا پر ہو اور اگر

$$\frac{1}{2\pi خ}\int_{گ} ف(ی)\,دی$$

کی کوئی قیمت ہو تو، اس قیمت کو ف (ی) کا نقطہ ی = ا پر باقی کہتے ہیں۔

لامتناہی پر باقی —

اگر ف (ی) کی ایک جداگانہ نادریت لامتناہی پر ہو اور گ ایک ایسا بڑا دائرہ ہو جو لامتناہی کے سوائے ف (ی) کے تمام نادر نقطوں کو گھیرے تو ف (ی) کے لامتناہی پر کے باقی کی تعریف تکملہ

$$\frac{1}{2\pi خ}\int_{گ} ف(ی)\,دی$$ سے کی جاتی ہے بشرطیکہ اس کی ایک معین قیمت ہو۔

جہاں تکملہ گ کے گرد منفی سمت میں (مبداء کے لحاظ سے) لیا گیا ہے۔
اگر اس تکملہ پر بدل ی = $\frac{1}{ظا}$ کا اطلاق کیا جائے تو یہ ہو جاتا ہے۔

$$\frac{1}{2\pi خ}\int -ف\left(\frac{1}{ظا}\right)\frac{دظا}{ظا^2}$$

جہاں تکملہ کو مبداء کے گرد ایک چھوٹے دائرہ پر مثبت سمت میں لیا گیا ہے۔
اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر

$$\underset{ظا\to}{نہا}\left\{-\frac{ف\left(\frac{1}{ظا}\right)}{ظا}\right\} \text{ یا } \underset{ی\to\infty}{نہا}\left\{-ی\,ف(ی)\right\}$$ کی ایک معین قیمت ہو تو یہ قیمت ف (ی) کی لامتناہی پر باقی ہے۔

اب ہم ف (ی) کی ی = ا پر باقی معلوم کرتے ہیں جبکہ ی = ا، ف (ی) کا پہلے رتبہ کا قطب ہو۔ اگر یہ ن ویں رتبہ کا قطب ہو تو اس پر باقی

کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

مثال (۳) ثابت کرو کہ اگر ف(ی)، ی = ا پر تحلیلی ہو، تو $\frac{ف(ی)}{ی-ا}$ کا باقی، ا پر ف(ا) ہے

چونکہ $\frac{۱}{۲\pi خ}\int_{گ}\frac{ف(ی)}{ی-ا}\,دی$

$$= \frac{۱}{۲\pi خ}\int_{گ}\frac{ف(ا)}{ی-ا}\,دی + \frac{۱}{۲\pi خ}\int_{گ}\frac{ف(ی)-ف(ا)}{ی-ا}\,دی$$

$$= ف(ا) + \frac{۱}{۲\pi خ}\int_{گ} ف(ا)\,دی + \frac{۱}{۲\pi خ}\int_{گ} له\,دی$$

$$= ف(ا) + \frac{۱}{۲\pi خ}\int_{گ} له\,دی$$

اب گ کو اتنا چھوٹا لو کہ اِس کے تمام نقاط کے لیے $|له| < ص$ - تب

$$\left|\frac{۱}{۲\pi خ}\int_{گ}\frac{ف(ی)}{ی-ا}\,دی - ف(ا)\right| < \frac{ص}{۲\pi}\,ل$$

جہاں ل، گ کا طول ہے۔

اِس لیے $\frac{۱}{۲\pi خ}\int_{گ}\frac{ف(ی)}{ی-ا}\,دی = ف(ا)$

مثال (۲) سے حاصل شدہ نتیجہ کو ہم ذیل کے مسئلہ کے طور پر بیان

کر سکتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر $\lim_{ی \to ا} \{(ی - ا) ف(ی)\}$ ایک معین عدد $ا$ ہو تو ف(ی) کا ا پر باقی $ا$ ہوتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ یہ مسئلہ صرف اُسی صورت کے لیے درست ہے جبکہ ی = ا ف(ی) کا سادہ یعنے پہلے رتبہ کا قطب ہو۔

مثال (۴) $(ی - ا)^{-۱}$ کا باقی ا پر اکائی ہے۔

کیونکہ $\lim_{ی \to ا} \frac{(ی - ا)}{(ی - ا)} = ۱$

اوپر کے مسئلہ سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر فہ(ی) اور سہ(ی)، ی کے کثیر الارقام جملے ہوں اور اگر (ی - ا)، سہ(ی) کا تکرار نہ پانے والا جزو ضربی ہو تو $\frac{فہ(ی)}{سہ(ی)}$ کا باقی ا پر $\frac{فہ(ا)}{سہ'(ا)}$ ہوتا ہے۔

مثال (۵) ثابت کرو کہ $\frac{ف ی^۲ + ق ی + ر}{(ی - ا)(ی - ب)}$ کے باقی ا اور ب پر

$\frac{ف ا^۲ + ق ا + ر}{ا - ب}$ اور $\frac{ف ب^۲ + ق ب + ر}{ب - ا}$ ہیں۔

ی = ا اور ی = ب تفاعل $\frac{ف ی^۲ + ق ی + ر}{(ی - ا)(ی - ب)}$ کے سادہ قطب ہیں اس لیے اِن پر باقی $\lim_{ی \to ا} \frac{(ی - ا)(ف ی^۲ + ق ی + ر)}{(ی - ا)(ی - ب)}$

$$= \frac{ف ا^۲ + ق ا + ر}{ا - ب}$$

اِسی طرح سے ی = ب پر باقی نکالی جاسکتی ہے۔

ب پر باقی اوپر کے نتیجہ سے $\frac{\text{فہ(ب)}}{\text{شہ(ب)}}$ سے بھی حاصل ہوتی ہے۔

$$= \frac{\text{ف ب}^{۲} + \text{ق ب} + \text{ر}}{\frac{\text{فر}}{\text{فری}}\left(\text{ی}^{۲} - \text{ی}(\text{ا}+\text{ب}) + \text{اب}\right)_{\text{ی}=\text{ب}}} \text{ پر}$$

$$= \frac{\text{ف ب}^{۲} + \text{ق ب} + \text{ر}}{\left\{۲\text{ی} - (\text{ا}+\text{ب})\right\}_{\text{ی}=\text{ب}}} = \frac{\text{ف ب}^{۲} + \text{ق ب} + \text{ر}}{\text{ب} - \text{ا}}$$

مسئلہ - اگر ایک یک قیمتی تفاعل کے محدود نادر نقطے ہوں، تو اِن نادر نقطوں پر باقیوں کا مجموعہ بشمول لامتناہی پر کے باقی کے، صفر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ گ ایک بند گھیرا ہے جس کے اندر سوائے لامتناہی کے تمام نادر نقطے واقع ہیں۔ تب اِن نادر نقطوں پر باقیوں کا مجموعہ $\frac{۱}{۲\pi\text{خ}}\int_{\text{گ}} \text{ف(ی) فری}$ ہوتا ہے۔

لیکن لامتناہی پر کا باقی ہے $-\frac{۱}{۲\pi\text{خ}}\int_{\text{گ}} \text{ف(ی) فری}$

اِس لیے باقیوں کا مجموعہ صفر ہے۔

مثال (۶) $\frac{\text{ی}^{۲}}{(\text{ی}-۱)(\text{ی}-۲)(\text{ی}-۳)}$ کے باقی ۱، ۲، ۳ اور لامتناہی پر معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اِن کا مجموعہ صفر ہے۔

ی = ۱، ۲، اور ۳ اِس تفاعل کے سادہ قطب ہیں اِسلیے۔

$$\text{ی} = ۱ \text{ پر باقی} = \text{نہا}_{\text{ی}\to۱} \frac{(\text{ی}-۱)\text{ی}^{۲}}{(\text{ی}-۱)(\text{ی}-۲)(\text{ی}-۳)}$$

$$= \frac{۱}{۱- \times ۲-} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{ی} = ۲ \text{ پر باقی} = \text{نہا}_{\text{ی}\to ۲} \frac{(\text{ی}-۲)\,\text{ی}^{۲}}{(\text{ی}-۱)(\text{ی}-۲)(\text{ی}-۳)}$$

$$= \frac{۴}{۱ \times ۱-} = ۴-$$

$$\text{ی} = ۳ \text{ پر باقی} = \text{نہا}_{\text{ی}\to ۳} \frac{(\text{ی}-۳)\,\text{ی}^{۲}}{(\text{ی}-۱)(\text{ی}-۲)(\text{ی}-۳)}$$

$$= \frac{۹}{۲ \times ۱} = \frac{۹}{۲}$$

$$\text{لاتناہی پر باقی} = \text{نہا}_{\text{ی}\to \infty} \left\{ -\text{ی ف(ی)} \right\}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ی}\to \infty} \frac{-\text{ی}^{۳}}{(\text{ی}-۱)(\text{ی}-۲)(\text{ی}-۳)}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ی}\to \infty} \frac{-\text{ی}^{۳}}{\text{ی}^{۳} - ۶\text{ی}^{۲} + ۱۱\text{ی} - ۶}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ی}\to \infty} \frac{-۱}{۱ - \frac{۶}{\text{ی}} - \frac{۱۱}{\text{ی}^{۲}} - \frac{۶}{\text{ی}^{۳}}} = ۱-$$

اِس لیے ۱، ۲، ۳ اور لاتناہی پر کے باقیوں کا مجموعہ

$$= \frac{۱}{۲} - \frac{۴}{۱} + \frac{۹}{۲} - \frac{۱}{۱} = \text{صفر}$$

۳۹- کوشی کا مسئلہ باقی —

فرض کرو کہ ف (ی) بند گھیرا گ کے اندر اور اوپر مسلسل ہے اور سوائے چند محدود قطب نقطوں کے جو گھیرا گ کے اندر ہیں یہ تحلیلی ہے - تب

$$\int_{\text{گ}} \text{ف}(\text{ی})\, \text{دی} = ۲\pi \text{خ} \sum \text{م}\surd$$

جہاں $\sum \text{م}\surd$ سے مراد گ کے اندر ف (ی) کے قطبوں پر باقیوں کا مجموعہ ہے

کوشی کے مسئلہ باقی سے بہت سے محدود تکملوں کی قیمتیں آسانی سے نکلتی ہیں - یہ یاد رہے کہ کوشی کے باقی کے مسئلہ سے جن محدود تکملوں کی قیمتیں نکالی جاتی ہیں وہ دوسرے طریقے سے بھی نکالی جا سکتی ہیں - اس کے برخلاف بہت سے سادہ تکملوں مثلاً $\int_{\text{ب}}^{\infty} \text{قو}^{\text{لا}^۲} \text{دلا}$، کی قیمت کوشی کے مسئلہ سے معلوم نہیں کی جا سکتی -

کوشی کے اس مسئلہ کی مدد سے محدود تکملوں کی قیمت معلوم کرنے کا مضمون بہت بڑا ہے - بعض تکملوں کی قیمتیں نکالنے کے لیے بہت پیچیدہ بند گھیرے لینے کی ضرورت ہوتی ہے - ہم اُتنی تفصیل سے یہاں بحث نہیں کرینگے اِس کے لیے طالب علم ملتف متغیر کے تفاعلوں کے نظریہ کی اعلیٰ کتابوں کا مطالعہ کر سکتا ہے - ہم یہاں صرف ایسے تکملوں کی قیمتیں معلوم کرینگے جو سادہ بند گھیروں مثلاً ایک بند دائرہ کا گھیرا یا بند نصف دائرہ کے گھیرے سے حاصل ہوتے ہیں -

مثال (۷) $\int_{|\text{ی}|=۱} \text{دی}$ کی قیمت معلوم کرو

گھیرا $|\text{ی}| = ۱$ کے اندر اِس تفاعل کا یعنے اکائی کا کوئی قطب نقطہ نہیں ہے اِس لیے کوشی کے مسئلہ سے تفاعل $\int_{|\text{ی}|=۱} \text{دی} = \text{صفر}$

مثال (۸) $\int_{\text{ی}} \frac{\text{وی}}{\text{ی} + \text{۲}}$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ گھیرا $|\text{ی}| = \text{۳}$ یا $|\text{ی}| = \text{۱}$ ہو۔

اگر گھیرا $|\text{ی}| = \text{۳}$ ہو تو تفاعل $\frac{\text{۱}}{\text{ی} + \text{۲}}$ کا اِس گھیرے کے اندر ایک قطب $\text{ی} = -\text{۲}$ ہے۔

$$\text{اِس پر باقی} \;\; \text{نہا}_{\text{ی} \to -\text{۲}} \frac{\text{ی} + \text{۲}}{\text{ی} + \text{۲}} = \text{۱}$$

$$\text{اِس لیے کوشی کے تکملی مسئلہ سے} \;\; \int_{|\text{ی}|=\text{۳}} \frac{\text{وی}}{\text{ی} + \text{۲}} = \text{۲}\pi\,\text{خ}$$

اگر گھیرا $|\text{ی}| = \text{۱}$ ہو تو تفاعل $\frac{\text{۱}}{\text{ی} + \text{۲}}$ کا اِس گھیرے کے اندر کوئی قطب نہیں ہے کیونکہ اس کا صرف ایک قطب $\text{ی} = -\text{۲}$ ہے جو گھیرا $|\text{ی}| = \text{۱}$ کے باہر ہے۔ اِس لیے یہ تفاعل اس گھیرے کے اندر تحلیلی ہے۔ اس لیے

$$\int_{|\text{ی}|=\text{۱}} \frac{\text{وی}}{\text{ی} + \text{۱}} = \text{صفر}$$

مثال (۹) $\int \frac{\text{وی}}{(\text{ی} + \text{۲})(\text{ی} + \text{۳})}$ کی قیمت معلوم کرو جبکہ تکملہ گھیرا $|\text{ی}| = \frac{\text{۵}}{\text{۲}}$ پر لیا گیا ہے۔

$$\text{اب} \;\; \frac{\text{۱}}{(\text{ی} + \text{۲})(\text{ی} + \text{۳})} = \frac{\text{۱}}{\text{ی} + \text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{ی} + \text{۳}}$$

$$\text{اِس لیے} \;\; \int \frac{\text{وی}}{(\text{ی} + \text{۲})(\text{ی} + \text{۳})} = \int \left\{ \frac{\text{۱}}{\text{ی} + \text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{ی} + \text{۳}} \right\} \text{وی}$$

اب تفاعل $\frac{\text{۱}}{(\text{ی}+\text{۲})(\text{ی}+\text{۳})}$ کا گھیرا $|\text{ی}| = \frac{\text{۵}}{\text{۲}}$ کے اندر صرف ایک قطب ی = -۲ ہے۔

اس لیے اس قطب پر باقی $= \text{نہا}_{\text{ی}\to-\text{۲}} \frac{(\text{ی}+\text{۲})}{(\text{ی}+\text{۲})(\text{ی}+\text{۳})} = \text{۱}$

$$\text{اِس لیے} \int_{|\text{ی}|=\frac{\text{۵}}{\text{۲}}} \left\{\frac{\text{۱}}{\text{ی}+\text{۲}} - \frac{\text{۱}}{\text{ی}+\text{۳}}\right\} \text{وری} = \text{۲}\pi\text{غ}$$

مثال (۱۰) $\int \frac{\text{ی وری}}{(\text{ی}+\text{۴})(\text{ی}+\text{۶})}$ کی قیمت معلوم کرو جب کہ گھیرا دائرہ $|\text{ی}| = \text{۷}$ ہو۔

$$\text{اب تفاعل} \quad \frac{\text{ی}}{(\text{ی}+\text{۴})(\text{ی}+\text{۶})} = \frac{\text{۳}}{\text{ی}+\text{۶}} - \frac{\text{۲}}{\text{ی}+\text{۴}}$$

$$\text{اِس لیے} \int_{|\text{ی}|=\text{۷}} \frac{\text{ی وری}}{(\text{ی}+\text{۴})(\text{ی}+\text{۶})} = \int_{|\text{ی}|=\text{۷}} \left\{\frac{\text{۳}}{\text{ی}+\text{۶}} - \frac{\text{۲}}{\text{ی}+\text{۴}}\right\} \text{وری}$$

$$= \text{۳}\int_{|\text{ی}|=\text{۷}} \frac{\text{وری}}{\text{ی}+\text{۶}} - \text{۲}\int_{|\text{ی}|=\text{۷}} \frac{\text{۱}}{\text{ی}+\text{۴}}\,\text{وری} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

گھیرا $|\text{ی}| = \text{۷}$ کے اندر ی = -۶ اور ی = -۴ اِس کے دو قطب ہیں اور اِن پر باقی $= \text{نہا}_{\text{ی}\to-\text{۶}} \frac{\text{ی}(\text{ی}+\text{۶})}{(\text{ی}+\text{۶})(\text{ی}+\text{۴})} = \frac{-\text{۶}}{-\text{۲}} = +\text{۳}$

اور $\text{نہا}_{\text{ی}\to-\text{۴}} \frac{\text{ی}(\text{ی}+\text{۴})}{(\text{ی}+\text{۴})(\text{ی}+\text{۶})} = \frac{-\text{۴}}{\text{۲}} = -\text{۲}$

اِس لیے $\int\limits_{|ی|=۲} \frac{ی\, وی}{(ی+۴)(ی+۲)} = (۳-۲) \times ۲\pi خ = ۲\pi خ$

اگر (ل) سے قیمتیں معلوم کی جاتی تو بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا۔

۴۰ - اکائی نصف قطر کے دائرہ کے گرد تکمل —

گھیرے تکملہ کی مدد سے ہم پہلے

$\int_{ب}^{۲\pi}$ فہ (جم طہ، جب طہ) وطہ کی قسم کے تکملوں کی قیمت

معلوم کرتے ہیں جہاں فہ (جم طہ، جب طہ)، جم طہ اور جب طہ کا منطق تفاعل ہے

فرض کرو کہ ی = $ۃ^{خ طہ}$

تب جم طہ = $\frac{۱}{۲}(ی + \frac{۱}{ی})$ جب طہ = $\frac{۱}{۲خ}(ی - \frac{۱}{ی})$ اور

$\frac{وی}{خ ی}$ = وطہ

اِس لیے $\int_{ب}^{۲\pi}$ فہ (جم طہ، جب طہ) وطہ = $\int_{گ}$ سہ (ی) وی

جہاں سہ (ی)، ی کا منطق تفاعل ہے اور گھیرا گ، اکائی دائرہ |ی| = ۱ ہے

اِس لیے $\int_{گ}$ سہ (ی) وی = ۲π خ $\sum ق_{گ}$

جہاں $\sum ق_{گ}$ سے مراد گھیرا گ کے اندر سہ (ی) کے قطب نقطوں پر باقیوں کا مجموعہ ہے۔

مثال (۱۱) $\int_{0}^{\pi 2} \frac{\text{و طہ}}{(\text{۱} - \text{۲ک جم طہ} + \text{ک}^{2})}$ کی قیمت معلوم کرو جہاں ک، حقیقی، ثبت اور اکائی سے کم ہے۔

یعنی ۰ < ک < ۱

درج کرو ی = $\text{و}^{\text{خ طہ}}$، تب جم طہ = $\frac{1}{2}(\text{ی} + \frac{1}{\text{ی}})$ اور و طہ = $\frac{\text{و ی}}{\text{خ ی}}$

اب جیسے جیسے طہ، صفر سے ۲ π تک بدلتا ہے، نقطہ ی، مرکز مبداء اور نصف قطر اکائی والا دائرہ مرتسم کرتا ہے۔

اس لیے دیا ہوا تکملہ $\int_{0}^{\pi 2} \frac{\text{و طہ}}{(\text{۱} - \text{۲ک جم طہ} + \text{ک}^{2})}$

گھیرا تکملہ $\int \frac{\text{و ی}}{\text{خ ی} \{\text{۱} - \text{ک}(\text{ی} + \frac{1}{\text{ی}}) + \text{ک}^{2}\}}$ کے مساوی ہے جہاں گھیرے تکملہ کو ثبت سمت میں اکائی دائرہ کے گرد لیا گیا ہے۔

$$\int \frac{\text{و ی}}{\text{خ ی} \{\text{۱} - \text{ک}(\text{ی} + \frac{1}{\text{ی}}) + \text{ک}^{2}\}} = \int \frac{\text{و ی}}{\text{خ ی}(\text{۱} - \text{ک ی})(\text{۱} - \frac{\text{ک}}{\text{ی}})}$$

$$= \int \frac{\text{و ی}}{\text{خ}(\text{۱} - \text{ک ی})(\text{ی} - \text{ک})}$$

اب مکمل ایک منطق تفاعل ہے جس کے سادہ قطب ی = ک اور ی = $\frac{1}{\text{ک}}$ پر ہیں دائرہ |ی| = ۱ کے گھیرے کے اندر اس کا صرف ایک قطب ی = ک ہے۔

ی = ک پر اس تفاعل کا باقی ہے۔

$$\text{نہا}_{\text{ی} \to \text{ک}} \frac{(\text{ی} - \text{ک})}{\text{خ}(\text{۱} - \text{ک ی})(\text{ی} - \text{ک})} = \frac{1}{\text{خ}(\text{۱} - \text{ک}^{2})}$$

اس لیے کوشی کے مسئلہ باقی سے

$$\int_{|ی|=1} \frac{\text{ف ی}}{\text{خ}(1-\text{ک ی})(\text{ی}-\text{ک})} = 2\pi\,\text{خ} \times \frac{1}{\text{خ}(1-\text{ک}^2)}$$

$$= \frac{2\pi}{1-\text{ک}^2}$$

مثال (۱۲) ثابت کرو کہ $\int_0^{2\pi} \frac{\text{ف ط}}{\text{ا} + \text{ب جم ط}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}$

جہاں $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ کی وہ قیمت منتخب کی گئی ہے جو لا تساوی

$|\text{ا} - \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}| < |\text{ب}|$ کو پورا کرتی ہے۔ یہ فرض کیا گیا ہے کہ

$\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ایسا حقیقی عدد نہیں ہے جس کے لیے $-1 \leqslant \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \leqslant 1$

اگر ی = $\text{و}^{\text{خ ط}}$، تو

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{ف ط}}{\text{ا} + \text{ب جم ط}} = \frac{2}{\text{خ}} \int_{\text{گ}} \frac{\text{ف ی}}{\text{ب ی}^2 + 2\text{ا ی} + \text{ب}} = \frac{2}{\text{خ ب}} \int_{\text{گ}} \frac{\text{ف ی}}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{بہ})}$$

جہاں گ، دائرہ $|\text{ی}| = 1$ ہے، اور ع اور بہ مساوات ب ی^2 + ۲ ا ی + ب = صفر کی اصلیں ہیں۔ چونکہ ع بہ = ۱، اس لیے حاصل ہوتا ہے کہ یا تو $|\text{ع}|$ یا $|\text{بہ}|$ ایک سے چھوٹا ہے یا $|\text{ع}| = |\text{بہ}| = 1$۔ $|\text{ع}| = |\text{بہ}| = 1$ نہیں ہو سکتا کیونکہ اس صورت میں $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ حقیقی ہوگا اس طرح کہ $-1 \leqslant \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \leqslant 1$

فرض کرو کہ ع = $\frac{-\text{ا} + \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}{\text{ب}}$ جہاں $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$ کی وہ قیمت لی گئی ہے جس کے لیے $|\text{ع}| < 1$۔

تب ی = ع تفاعل $\frac{1}{(\text{ی} - \text{ع})(\text{ی} - \text{بہ})}$ کا گھیرا گ کے اندر صرف

ایک قطب ہے۔

اس پر باقی = $\lim_{ی \to عہ} \frac{(ی - عہ)}{(ی - عہ)(ی - بہ)} = \frac{1}{عہ - بہ}$

اس لیے کوشی کے مسئلہ باقی سے

$$\int_0^{\pi 2} \frac{ﻭ طہ}{ﺍ + ﺏ\ ﺟﻢ\ طہ} = \frac{2}{خ\ ﺏ} \int_{|ی| = 1} \frac{ﻭ ی}{(ی - عہ)(ی - بہ)}$$

$$= \frac{2}{خ\ ﺏ} \int \frac{ﻭ ی}{(ی - عہ)(ی - بہ)} = 2\pi خ \times \frac{1}{عہ - بہ} \times \frac{2}{خ\ ﺏ}$$

یعنی $\int_0^{\pi 2} \frac{ﻭ طہ}{ﺍ + ﺏ\ ﺟﻢ\ طہ} = 2\pi خ \times \frac{2}{خ\ ﺏ} \times \frac{1}{عہ - بہ}$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{ﺍ^2 - ﺏ^2}}$$

مثال (۱۳) $\int_0^{\pi 2} مم \left[\frac{(لا - ﺍ - خ\ ﺏ)}{2}\right] ﻭ لا$ کی قیمت معلوم کرو جب کہ

ب $\neq$ صفر

$$مم \left[\frac{لا - ﺍ - خ\ ﺏ}{2}\right] = خ \frac{ﻭ^{خ\left(\frac{لا - ﺍ - خ\ ﺏ}{2}\right)} + ﻭ^{-خ\left(\frac{لا - ﺍ - خ\ ﺏ}{2}\right)}}{ﻭ^{خ\left(\frac{لا - ﺍ - خ\ ﺏ}{2}\right)} - ﻭ^{-خ\left(\frac{لا - ﺍ - خ\ ﺏ}{2}\right)}} \quad \cdots\cdots (1)$$

مساوات نمبر ا کی بائیں جانب شمار کنندہ اور نسب نما کو $ﻭ^{خ\left[\frac{لا + ﺍ + خ\ ﺏ}{2}\right]}$ سے ضرب دو تب

$$مم \left[\frac{لا - ﺍ - خ\ ﺏ}{2}\right] = خ \frac{ﻭ^{خ\ لا} + ﻭ^{-ﺏ + ﺍ خ}}{ﻭ^{خ\ لا} - ﻭ^{-ﺏ + ﺍ خ}}$$

اب فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{قو}^{\text{غ لا}}$، تب $\dfrac{\text{وری}}{\text{غ ی}} = \text{ورلا}$

اِس لیے جب لا، صفر سے ۲π تک بدلتا ہے تو ی، اکائی نصف قطر کا دائرہ مبداء کے گرد مرتسم کرتا ہے۔

$$\text{اسلیے} \int_{0}^{۲\pi} \text{مم}\left[\frac{\text{لا} - \text{ا} - \text{غ ب}}{۲}\right] \text{ورلا} = \int_{|\text{ی}|=۱} \frac{\text{ی} + \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}}{\text{ی} - \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}} \times \frac{\text{وری}}{\text{ی}}$$

تفاعل جس کو تکمل کرنا ہے اُس کے دو سادہ قطب ی = صفر، اور $\text{ی} = \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}$ پر ہیں۔

$$\text{اب ی = صفر پر باقی} = \text{نہا}_{\text{ی}\to ۰} \frac{\text{ی}\left(\text{ی} + \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}\right)}{\text{ی}\left(\text{ی} - \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}\right)} = -۱$$

$$\text{اور ی} = \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}} \text{ پر باقی} = \text{نہا}_{\text{ی}\to\text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}} \frac{\left(\text{ی} + \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}\right)\left(\text{ی} - \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}\right)}{\left(\text{ی} - \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}\right)} \times \frac{۱}{\text{ی}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ی}\to\text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}} \frac{\text{ی} + \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}}{\text{ی}} = +۲$$

اِس لیے ی = صفر اور $\text{ی} = \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}$ پر باقی بالترتیب (−۱) اور (+۲) ہیں
اگر ب مثبت ہے، تو دونوں قطب تکمل کے راستہ کے اندر ہیں اور اِس صورت میں

$$\int_{|\text{ی}|=۱} \frac{\text{ی} + \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}}{\text{ی} - \text{قو}^{-\text{ب}+\text{اغ}}} \times \frac{\text{وری}}{\text{ی}} = ۲\pi\text{غ}\left[-۱+۲\right] = ۲\pi\text{غ}$$

اگر ب منفی ہے، تو صرف ایک ہی قطب ی = ۰ گھیرا |ی| = ۱ کے اندر ہے - اِس صورت میں

$$\int_{|\text{ی}|=1} \frac{\text{ی} + \text{و}^{-\text{ب}+\text{ا}\text{خ}}}{\text{ی} - \text{و}^{-\text{ب}+\text{ا}\text{خ}}} \times \frac{\text{فری}}{\text{ی}} = 2\pi\,\text{خ} \times (-1)$$

$$= -2\pi\,\text{خ}$$

اِس لیے مطلوبہ تکملہ کی قیمت $\pm 2\pi$ خ ہے جیسے کہ ب مثبت ہے یا منفی

اب ہم دوسری قسم کے تکملوں کی قیمتیں معلوم کرینگے -

فرض کرو کہ ق (ی)، ی کا ایسا تفاعل ہے جو ذیل کی شرطوں کو پورا کرتا ہے -

(۱) ق (ی)، اوپر کے نصف مستوی میں جزوی طور پر تحلیلی تفاعل ہے -

(۲) حقیقی محور پر ق (ی) کے کوئی قطب نقطے نہیں ہیں -

(۳) ی ق (ی) یکساں طور پر مائل بہ صفر جبکہ $|\text{ی}| \longrightarrow \infty$ جبکہ $0 \leq$ دلیل ی $\leq \pi$

(۴) $\int_{0}^{\infty}$ ق (لا) فرلا اور $\int_{-\infty}^{0}$ ق (لا) فرلا دونوں متدق ہیں - تب

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ق}(\text{لا})\,\text{فرلا} = 2\pi\,\text{خ} \sum \bar{\text{ر}}$$

جہاں $\bar{\text{ر}}$، اوپر کے نصف مستوی میں ق (ی) کے قطب نقطوں پر کے باقیوں کا مجموعہ ہے -

اِس کے لیے اوپر کے نصف مستوی میں گھیرا ایک نصف دائرہ لو - جس کا مرکز مبداء پر ہے اور نصف قطر ر ہے -

فرض کرو کہ نصف دائرہ کو جا سے تعبیر کرتے ہیں، ر کو ایسا بڑا منتخب کرو کہ اِس نصف دائرہ کے اندر ق (ی) کے تمام قطب شامل ہوں۔ تب مسئلہ باقی سے

$$\int_{-\text{ر}}^{+\text{ر}} \text{ق(لا) ڈلا} + \int_{\text{جا}} \text{ق(ی) ڈی} = ۲\pi\text{خ} \sum \bar{\text{ب}}$$

نمبر (۳) شرط سے اگر ر کافی بڑا ہو، تو جا پر کے تمام نقاط کے لیے

$$|\text{ی ق(ی)}| < \text{صہ}$$

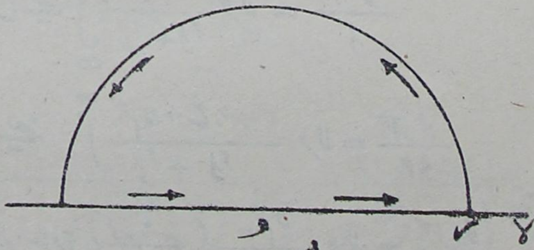
اور اِسلیے
$$\left|\int_{\text{جا}} \text{ق(ی) ڈی}\right| = \left|\int_{0}^{\pi} \text{ق(ر قو}^{\text{خ طہ}}\text{) ر قو}^{\text{خ طہ}} \text{ خ ڈطہ}\right| < \text{صہ} \int_{0}^{\pi} \text{ڈطہ} = \pi\,\text{صہ}$$

اس لیے جب ر ← ∞ تو جا کے گرد تکملہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے
اگر شرط نمبر (۴) پوری ہو تو حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ق(لا) ڈلا} = ۲\pi\text{خ} \sum \bar{\text{ب}}$$

مثال (۱۴) ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم لا ڈلا}}{\text{لا}^{۲} + \text{ا}^{۲}} = \frac{\pi\,\text{قو}^{-\text{ا}}}{۲\,\text{ا}}$ جہاں ا > ۰.

$\text{ق(ی)} = \frac{\text{قو}^{\text{خ ی}}}{\text{ی}^{۲} + \text{ا}^{۲}}$ کو گھیرا [شکل ۳۸] کے گرد تکمل کرو گھیرا ہے



شکل (۳۸)

(۱) $-\text{ر}$ سے $+\text{ر}$ تک لا محور جہاں ر بہت بڑا ہے۔

(۲) نصف دائرہ $|\text{ی}| = \text{ر}$ جو لا محور کے اوپر واقع ہے۔ اِس گھیرے کے اندر ق(ی) کا صرف ایک قطب خ ا ہے اِس پر کا باقی ہے

$$\text{نہا}_{\text{ی}\to\text{خ ا}}\left\{(\text{ی}-\text{خ ا})\frac{\text{قو}^{\text{خ ی}}}{\text{ی}^{۲}+\text{ا}^{۲}}\right\}=\frac{\text{قو}^{-\text{ا}}}{۲\,\text{خ ا}}$$

$$\text{اِس لیے}\int_{-\text{ر}}^{\text{ر}}\text{ق(لا) فرلا}+\int_{\text{ب}}^{\pi}\text{ق}(\text{ر قو}^{\text{خ طہ}})\,\text{ر قو}^{\text{خ طہ}}\times\text{خ فرطہ}$$

$$=۲\pi\,\text{خ}\times\frac{\text{قو}^{-\text{ا}}}{۲\,\text{خ ا}}=\frac{\pi}{\text{ا}}\times\text{قو}^{-\text{ا}}$$

$$\text{لیکن}\left|\int_{\text{ب}}^{\pi}\text{ق}(\text{ر قو}^{\text{خ طہ}})\,\text{ر قو}^{\text{خ طہ}}\times\text{خ فرطہ}\right|\leqq\int_{\text{ب}}^{\pi}\frac{\text{قو}^{-\text{ر جب طہ}}}{\text{ر}^{۲}-\text{ا}^{۲}}\,\text{ر فرطہ}$$

$$<\frac{\text{ر}}{\text{ر}^{۲}-\text{ا}^{۲}}\int_{\text{ب}}^{\pi}\text{فرطہ}،\ \text{چونکہ}\ \text{قو}^{-\text{ر جب طہ}}\leqq ۱$$

$$<\frac{\pi\,\text{ر}}{\text{ر}^{۲}-\text{ا}^{۲}}$$

اِس لیے نصف دائرہ کے گرد تکملہ مائل بہ صفر ہوتا ہے جبکہ ر مائل بہ لاتناہی ہو۔

$$\text{اِس لیے}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{قو}^{\text{خ لا}}}{\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}}\,\text{فرلا}=\frac{\pi\,\text{قو}^{-\text{ا}}}{\text{ا}}$$

$$\text{یعنی}\int_{\text{ب}}^{\infty}\frac{\text{جم لا}+\text{خ جب لا}}{\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}}\,\text{فرلا}=\frac{\pi\,\text{قو}^{-\text{ا}}}{۲\,\text{ا}}$$

$$\text{حقیقی حصوں کو مساوی رکھنے سے}\int_{\text{ب}}^{\infty}\frac{\text{جم لا}}{\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}}\,\text{فرلا}=\frac{\pi\,\text{قو}^{-\text{ا}}}{۲\,\text{ا}}$$

مثال (۱۵) اگر ا > ۰ تو ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ڈلا}}{\text{لا}^{4} + \text{ا}^{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,\text{ا}^{3}}$$

اگر $\text{ی}^{4} + \text{ا}^{4} = \text{صفر}$، تو $\text{ی}^{4} = (-1)\,\text{ا}^{4} = \text{ا}^{4}\,\text{و}^{\text{غ}\pi}$

اسلیئے تکمل کے سادہ قطب $\text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}}$، $\text{ا}\,\text{و}^{\frac{3\text{غ}\pi}{4}}$، $\text{ا}\,\text{و}^{\frac{5\text{غ}\pi}{4}}$، اور $\text{ا}\,\text{و}^{\frac{7\text{غ}\pi}{4}}$ پر ہیں۔

اگر مثال (۱۰) کی طرح ہم $\int \frac{\text{ڈی}}{\text{ی}^{4} + \text{ا}^{4}}$ کو شکل (۳۸) کے نصف دائرہ کے گھیرے کے گرد تکمل کریں، تو اوپر کے نصف مستوی میں اِس کے صرف دو قطب $\text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}}$ اور $\text{ا}\,\text{و}^{\frac{3\text{غ}\pi}{4}}$ ہیں۔

ق(ی) کے سب شرائط پورے ہوتے ہیں اِس لیے اوپر کے مسئلہ سے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ڈلا}}{\text{لا}^{4} + \text{ا}^{4}} = 2\pi\text{غ}\ \Sigma \left[\text{ی} = \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}} \text{ اور } \text{ا}\,\text{و}^{\frac{3\text{غ}\pi}{4}} \text{ پر باقی}\right]$$

$$\text{ی} = \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}} \text{ پر باقی} = \text{نہا}_{\text{ی} \to \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}}} \frac{\left(\text{ی} - \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}}\right)}{\text{ی}^{4} + \text{ا}^{4}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ی} \to \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}}} \frac{\cancel{\left(\text{ی} - \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}}\right)}}{\cancel{\left(\text{ی} - \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\text{غ}\pi}{4}}\right)}\left(\text{ی} - \text{ا}\,\text{و}^{\frac{3\text{غ}\pi}{4}}\right)\left(\text{ی} - \text{ا}\,\text{و}^{\frac{5\text{غ}\pi}{4}}\right)\left(\text{ی} - \text{ا}\,\text{و}^{\frac{7\text{غ}\pi}{4}}\right)}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ی}\to \text{ا}\,\text{و}^{\frac{\pi \text{خ}}{4}}} \frac{1}{(\text{ی}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{3\pi\text{خ}}{4}})(\text{ی}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{5\pi\text{خ}}{4}})(\text{ی}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{7\pi\text{خ}}{4}})}$$

$$= \frac{1}{(\text{ا}\,\text{و}^{\frac{\pi\text{خ}}{4}}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{3\pi\text{خ}}{4}})(\text{ا}\,\text{و}^{\frac{\pi\text{خ}}{4}}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{5\pi\text{خ}}{4}})(\text{ا}\,\text{و}^{\frac{\pi\text{خ}}{4}}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{7\pi\text{خ}}{4}})}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^3(\text{و}^{\frac{\pi\text{خ}}{4}}-\text{و}^{\frac{3\pi\text{خ}}{4}})(\text{و}^{\frac{\pi\text{خ}}{4}}-\text{و}^{\frac{5\pi\text{خ}}{4}})(\text{و}^{\frac{\pi\text{خ}}{4}}-\text{و}^{\frac{7\pi\text{خ}}{4}})}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^3} \times \frac{1}{\left(\frac{\text{خ}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\text{خ}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\text{خ}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\text{خ}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\text{خ}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\text{خ}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^3} \times \frac{1}{\left(\frac{\text{خ}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{2\text{خ}}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times 2} = \frac{1}{\text{ا}^3\,\text{خ}\times 2\sqrt{2}\,(1+\text{خ})}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^3\,\text{خ}} \times \frac{(1-\text{خ})}{2\sqrt{2}\,(1+\text{خ})(1-\text{خ})} = \frac{(1-\text{خ})}{\text{ا}^3\,\text{خ}\times 4\sqrt{2}} = \frac{(1-\text{خ})}{4\sqrt{2}} \times \frac{1}{\text{ا}^3\,\text{خ}}$$

اسی طرح سے $\text{ی} = \text{ا}\,\text{و}^{\frac{3\pi\text{خ}}{4}}$ پر باقی

$$= \text{نہا}_{\text{ی}\to \text{ا}\,\text{و}^{\frac{3\pi\text{خ}}{4}}} \frac{1}{(\text{ی}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{\pi\text{خ}}{4}})(\text{ی}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{5\pi\text{خ}}{4}})(\text{ی}-\text{ا}\,\text{و}^{\frac{7\pi\text{خ}}{4}})}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^3(\text{و}^{\frac{3\pi\text{خ}}{4}}-\text{و}^{\frac{\pi\text{خ}}{4}})(\text{و}^{\frac{3\pi\text{خ}}{4}}-\text{و}^{\frac{5\pi\text{خ}}{4}})(\text{و}^{\frac{3\pi\text{خ}}{4}}-\text{و}^{\frac{7\pi\text{خ}}{4}})}$$

[equations illegible in detail: product of factors in Urdu mathematical notation]

اس لیے ی = ا و^(π خ/۴) اور ی = ا و^(۳π خ/۴) پر باقیوں کا مجموعہ

$$= \frac{1}{۴\sqrt{۲}\times خ \times ا^۳}\left[خ + ۱ + خ - ۱\right]$$

$$= \frac{۲}{۴\sqrt{۲}\, خ \times ا^۳} = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}\, خ\, ا^۳}$$

اس لیے $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{د لا}{لا^۴ + ا^۴} = ۲\pi خ \times \frac{۱}{۲\sqrt{۲}\, خ\, ا^۳}$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{۲} \times ا^۳}$$

اس لیے $\int_{0}^{\infty} \frac{د لا}{لا^۴ + ا^۴} = \frac{\pi}{۲\sqrt{۲}} \times \frac{۱}{ا^۳}$

امثلہ نمبری (۷)

(۱) ثابت کرو کہ $\int_{0}^{ب} و^{ای}\, د ی = \frac{(و^{اب} - ۱)}{ا}$

(۲) ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\text{ی}} \text{جم ا ی}\;\text{و ی} = \frac{\text{جب ا ی}}{\text{ا}}$

(۳) ثابت کرو کہ خ π پر $\frac{\text{قو}^{\text{ا ی}}}{1+\text{قو}^{\text{ی}}}$ کا باقی $-\,\text{قو}^{\text{ا}\pi\text{خ}}$ ہے۔

(۴) اگر ک کوئی صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ مم ی کا ک π پر باقی ۱ ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ $\frac{\text{قو}^{\text{خ ی}}}{(\text{ی}^2+\text{ا}^2)}$ اور $\frac{\text{ی قو}^{\text{ی}}}{\text{ی}^2+\text{ا}^2}$ کے باقی ا خ پر بالترتیب $\frac{\text{قو}^{-\text{ا}}}{2\,\text{ا خ}}$

اور $\frac{\text{قو}^{\text{ا}}}{2}$ ہیں۔

(۶) ثابت کرو کہ $\int_{0}^{2\pi} \frac{\text{و طہ}}{1-\text{ا قو}^{\text{خ طہ}}} = 2\pi$ یا صفر بہ سبب اسکے کہ |ا| < ۱ یا |ا| > صفر

(۷) اگر ا > ب > صفر تو ثابت کرو کہ

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\text{جب}^2\text{طہ و طہ}}{\text{ا}+\text{ب جم طہ}} = \frac{2\pi}{\text{ب}^2}\left\{\text{ا} - \sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}\right\}$$

(۸) $\int_{0}^{\pi} \frac{\text{ا و طہ}}{\text{ا}^2+\text{جب}^2\text{طہ}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\text{ا}^2}} \quad (\text{ا} > 0)$

نصف دائرے کے گھیرے کے گرد تکمل کرکے ثابت کرو۔

(۹) $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{لا جب م لا}}{\text{لا}^4+\text{ا}^4}\,\text{و لا} = \frac{\pi}{2\,\text{ا}^2}\,\text{قو}^{-\frac{\text{م ا}}{\sqrt{2}}}\,\text{جب}\,\frac{\text{م ا}}{\sqrt{2}}$ [$\text{ق(ی)} = \frac{\text{ی قو}^{\text{خ م ی}}}{\text{ی}^4+\text{ا}^4}$ فرض کرو]

(۱۰) $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{جم م لا}}{\text{لا}^4+\text{ا}^4}\,\text{و لا} = \frac{\pi}{2\,\text{ا}^3}\,\text{قو}^{-\frac{\text{م ا}}{\sqrt{2}}}\,\text{جب}\left(\frac{\text{م ا}}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right)$

(۱۱) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{ا جم لا} + \text{لا جب لا}}{\text{لا}^2+\text{ا}^2}\,\text{و لا} = 2\pi\,\text{قو}^{-\text{ا}}$ [$\text{ق(ی)} = \frac{\text{قو}^{\text{خ ی}}}{(\text{ی} - \text{ا خ})}$]

(۱۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-ا\, جم\, لا + لا\, جب\, لا}{لا^{2} + ا^{2}}\, ولا = صفر \quad \left[ق(ی) = \frac{و^{خ ی}}{ی + ا خ} \right]$

(۱۳) $\int_{0}^{\infty} \frac{لا^{3}\, جب\, م\, لا}{لا^{4} + ا^{4}}\, ولا = \frac{\pi}{2}\, و^{-\frac{م ا}{\sqrt{2}}}\, جم\, \frac{م ا}{\sqrt{2}}$ جہاں $م > 0$

(۱۴) اگر $0 < ع < \frac{\pi}{2}$، تو ثابت کرو کہ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{مسق^{-1} لا\, ولا}{لا^{2} - 2\, لا\, جب\, ع + 1} = \frac{\pi\, ع}{2\, جم\, ع}$$

[لوک $\frac{(1 - خ ی)}{(ی^{2} - 2\, ی\, جب\, ع + 1)}$ کو نصف دائرہ کے گرد تکمل کرو]

(۱۵) اگر $ا \geqq صفر$ تو ثابت کرو کہ

(۱) $\int_{0}^{\infty} \frac{(1 + لا^{2})\, جم\, ا\, لا}{1 + لا^{2} + لا^{4}}\, ولا = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\, و^{-\frac{\sqrt{3}}{2} ا}\, جم\, \frac{ا}{2}$

(۲) $\int_{0}^{\infty} \frac{لا\, جب\, ا\, لا}{1 + لا^{2} + لا^{4}}\, ولا = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\, و^{-\frac{\sqrt{3}}{2} ا}\, جب\, \frac{ا}{2}$

[$\frac{و^{خ ا ی}}{1 + ی + ی^{2}}$ کو نصف دائرہ کے گرد تکمل کرو]

(۱۶) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{جم\, لا\, ولا}{(لا^{2} + ا^{2})(لا^{2} + ب^{2})} = \frac{\pi}{ا^{2} - ب^{2}} \left\{ \frac{و^{-ب}}{ب} - \frac{و^{-ا}}{ا} \right\} \quad (ا > ب > 0)$

(۱۷) ثابت کرو کہ

$$\int_{ب}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{ر\ جب\ ۲ط}{۱-۲ر\ جم\ ۲ط+ر^۲}\ ط\ وط = \frac{\pi}{۲}\ لوک\ (۱+ر)،\ اگر\ -۱ < ر < ۱$$

$$= \frac{\pi}{۴}\ لوک\ (۱+\frac{۱}{ر})\ اگر\ ر < -۱\ یا\ ر > ۱$$

[$\frac{۲\ ی\ ر}{ی^۲(۱+ر)^۲+(۱-ر)^۲} \cdot \frac{لوک\ (۱-خ\ ی)}{۱+ی^۲}$ کو نصف دائرہ کے گرد تکمل

کرو اور لکھو لا = مس ط]

(۱۸) ثابت کرو کہ $\int_{ب}^{\infty} \frac{جم\ م\ لا}{۱+لا^۲}\ ولا = \frac{\pi}{۲}\ قو^{-م}$

(۱۹) $\int_{ح} \frac{ی-۱}{ی+۱}\ وی$ کی قیمت معلوم کرو جہاں گ، دائرہ $|ی| = \frac{۱}{۲}$ اور

دائرہ $|ی| = ۲$ کو تعبیر کرتا ہے۔

ثابت کرو کہ پہلی صورت میں تکملہ کی قیمت صفر ہے اور دوسری صورت میں

$(-۴\pi خ)$ ہے۔

اِس سے اخذ کرو کہ

$$\int_{ب}^{۲\pi} \frac{جم\ ط+۲}{۵+۴\ جم\ ط}\ وط = صفر\ اور \int_{ب}^{۲\pi} \frac{جب\ ط}{۵+۴\ جم\ ط}\ وط = صفر$$

(۲۰) $\int_{ح} \frac{۳ی^۲+۱۲ی+۱۱}{(ی+۱)(ی+۲)(ی+۳)}\ وی$ کی قیمت معلوم کرو جہاں گ گھیرا $|ی| = \frac{۵}{۲}$ ہے۔

―――(٭)―――

باب ہشتم

لامتناہی سلسلے اور اُنکا استدقاق

۴۱۔ تواتر کی انتہا ——— فرض کرو کہ $ی_۱، ی_۲، ی_ن، \ldots$ حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک لامتناہی تواتر ہے۔ تواتر کو انتہا ل کی طرف مستدق کہتے ہیں، اگر کسی اختیاری صہ کے جواب میں ایک ایسا م معلوم ہو سکے کہ

$$|ی_ن - ل| < صہ \quad \text{جبکہ} \quad ن \geqq م$$

اگر $ی_ن = (لا_ن + خ\ ما_ن)$ اور $ل = (ا + خ\ ب)$، تو

$$|لا_ن - ا| < صہ \quad \text{اور} \quad |ما_ن - ب| < صہ$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تواتر $لا_۱، لا_۲، \ldots$ اور $ما_۱، ما_۲، \ldots$ انتہاؤں ا اور ب کی طرف مستدق ہوتے ہیں۔ برعکس اس کے اگر یہ دو تواتر انتہاؤں ا اور ب کی طرف مائل ہوں تو تواتر ی، (ا + خ ب) کی طرف مائل ہوتا ہے۔

مسئلہ۔ اس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ ایک تواتر کی انتہا ہو یہ ہے کہ کسی صہ کے جواب میں ایک ایسا ن معلوم ہو سکے کہ $|ی_{ن+ف} - ی_ن| < صہ$،

جہاں ف کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔

یہ شرط ضروری ہے کیونکہ، اگر اس کی انتہا ل ہو تو

$$\left| \text{ی}_{\text{ن}+\text{ف}} - \text{ی}_{\text{ن}} \right| \leqq \left| \text{ی}_{\text{ن}+\text{ف}} - \text{ل} \right| + \left| \text{ی}_{\text{ن}} - \text{ل} \right|$$

یہ کافی بھی ہے کیونکہ اِس میں یہ شرائط داخل ہیں

$$\left| \text{لا}_{\text{ن}+\text{ف}} - \text{لا}_{\text{ن}} \right| < \text{صہ}، \quad \left| \text{ما}_{\text{ن}+\text{ف}} - \text{ما}_{\text{ن}} \right| < \text{صہ}،$$

جس سے تواترعں لا اور ما کا استدقاق معلوم ہوتا ہے۔

تواتروں کا یکساں استدقاق:— یہ ہو سکتا ہے کہ تمام ہی متغیر ظا کے تفاعل ہوں۔ اِس کو $\text{ی}_{\text{ن}}$ کی بجائے $\text{ی}_{\text{ن}}$ (ظا) لکھنے سے ظاہر کرتے ہیں۔ تب اگر دیے ہوئے خطہ کے اندر تمام نقطوں ظا کے لیے، تواتر مستدق ہو اور اُس کی انتہا ل (ظا) ہو، اور ایک ایسا م معلوم ہو سکے کہ اِس رقبہ کے اندر تمام نقطوں کے لیے $\left| \text{ی}_{\text{ن}}(\text{ظا}) - \text{ل}(\text{ظا}) \right| < \text{صہ}$، جبکہ $\text{ن} \geqq \text{م}$، تو تواتر کو اِس خطہ کے اندر یکساں طور پر **مستدق** کہتے ہیں۔

۴۲۔ سلسلوں کا اِستدقاق —

فرض کرو کہ دیا ہوا سلسلہ ہے۔

$$\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ھ}_{\text{ن}} = \text{ھ}_1 + \text{ھ}_2 + \text{ھ}_3 + \dots\dots + \text{ھ}_{\text{ن}} + \dots\dots$$

جہاں $\text{ھ}_{\text{ن}} = \text{ع}_{\text{ن}} + \text{خ}\, \text{و}_{\text{ن}}$، اور $\text{ع}_{\text{ن}}$ اور $\text{و}_{\text{ن}}$ حقیقی اعداد ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{س}_{\text{ن}}$، لاتناہی سلسلہ $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ھ}_{\text{ن}}$ کی پہلی ن رقموں کے

مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔ یعنے

$$س_ن = ھ_۱ + ھ_۲ + ھ_۳ + \cdots\cdots + ھ_ن$$

تب اگر تواتر $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ .... $س_ن$ کی ایک محدود اُنتہا ہو تو سلسلہ

$\sum_{ن=۱}^{\infty} ھ_ن$ کو **مستدق سلسلہ** کہتے ہیں۔

اگر تواتر $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ .... $س_ن$

کی ایک محدود انتہا س ہو تو س کو لاتناہی تک ملتف سلسلہ $\sum_{ن=۱}^{\infty} ھ_ن$ کا **مجموعہ** کہتے ہیں۔

اگر $س_ن$ کی انتہا، جبکہ ن لاتناہی کی طرف مائل ہو وجود نہ رکھتی ہو، تو ہم سلسلہ $\sum_{ن=۱}^{\infty} ھ_ن$ کو **متسع سلسلہ** کہتے ہیں۔

مسئلہ (۱)۔ اِس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ سلسلہ

$$ھ_۱ + ھ_۲ + ھ_۳ + \cdots\cdots + ھ_ن + \cdots\cdots$$

مستدق ہو یہ ہے کہ کسی اختیاری چھوٹے مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک ایسا عدد م وجود رکھے کہ $|ھ_{ن+۱} + ھ_{ن+۲} + \cdots\cdots + ھ_{ن+ف}| < صہ$ جبکہ $ن > م$

جہاں ف = ۱، ۲، ۳، ....

ثبوت:- تواتر $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ .... $س_ن$ پر غور کرو۔

اِس تواتر کے مستدق ہونے کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ کسی صہ کے جواب میں ایک صحیح عدد م ایسا وجود رکھے کہ $|س_{ن+ف} - س_ن| < صہ$ جب کہ $ن > م$، اور ف = ۱، ۲، ۳ .... (اسکو ہم نے ثابت کیا ہے)

اب $س_ن$ اور $س_{ن+ف}$ کی قیمتوں کی بجائے ھ کی متناظر قیمتیں رکھنے سے

مطلوبہ شرط حاصل ہوتی ہے۔

پس مسئلہ ثابت ہوا۔

اگر $ھ_ن = (ع_ن + خ و_ن)$ تو سلسلے $\sum ع_ن$ اور $\sum و_ن$ حقیقی قیمتوں

ع اور و کی طرف مستدق ہونگے جہاں $ع + خ و = س$، کیونکہ

$\left|\sum_{۱}^{ن} ع_ن - ع\right|$ اور $\left|\sum_{۱}^{ن} و_ن - و\right|$ دونوں $|س_ن - س|$ سے کم ہیں۔

برعکس اس کے اگر سلسلے $\sum ع_ن$ اور $\sum و_ن$، ع اور و کی طرف مستدق

ہوں، تو سلسلہ $\sum (ع_ن + خ و_ن)$ قیمت $(ع + خ و)$ کی طرف مستدق ہوگا، چونکہ

$$\left|\sum_{۱}^{ن} (ع_ن + خ و_ن) - (ع + خ و)\right| \leqq \left|\sum_{۱}^{ن} ع_ن - ع\right| + \left|\sum_{۱}^{ن} و_ن - و\right|$$

یہ فوراً دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر $\sum ع_ن$ یا $\sum و_ن$ میں سے ایک بھی متسع ہو تو

$\sum ھ_ن = \sum (ع_ن + خ و_ن)$ بھی متسع ہوگا۔

مثال (۱) $\sum \left(\frac{۱}{ن} + \frac{خ}{۲^ن}\right)$ کے استدقاق یا اتساع پر غور کرو۔

$$\sum \left(\frac{۱}{ن} + \frac{خ}{۲^ن}\right) = \left(۱ + \frac{۱}{۲} خ\right) + \left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} خ\right) + \left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۸} خ\right) \cdots\cdots$$

یہاں $\sum ع_ن = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \cdots\cdots$

$$\sum و_ن = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \frac{۱}{۲^۴} + \cdots\cdots$$

سلسلہ $\sum ع_ن$، متسع ہے اور $\sum و_ن$ مستدق ہے۔

اِس لیے $\sum$ (عٍ + خ وٍ) متسع ہے۔

حقیقی مثبت رقموں والے سلسلہ

$|ھ_1| + |ھ_2| + |ھ_3| + \cdots\cdots + |ھ_ن|$ کو مقیاسوں کا سلسلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ - اگر مقیاسوں کا سلسلہ $\sum_{ن=1}^{\infty} |ھ_ن|$ مستدق ہو، تو ابتدائی سلسلہ $\sum ھ_ن$ بھی مستدق ہوگا۔

مفروضہ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ مطلق قیمتوں والا سلسلہ

$|ھ_1| + |ھ_2| + |ھ_3| + \cdots\cdots + |ھ_ن|$، مستدق ہے۔

چونکہ مقیاسوں کا سلسلہ مستدق ہے اِس لیے حاصل ہوتا ہے کہ

$\{ |ھ_{ن+1}| + \cdots\cdots + |ھ_{ن+ف}| \} < \epsilon$ جبکہ ن > م، ف = ۱، ۲، ۳، ...

لیکن ہم جانتے ہیں کہ

$|ھ_{ن+1} + \cdots\cdots + ھ_{ن+ف}| \leqq |ھ_{ن+1}| + \cdots\cdots + |ھ_{ن+ف}|$

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$|ھ_{ن+1} + \cdots\cdots + ھ_{ن+ف}| < \epsilon$، جبکہ ن > م،

ف = ۱، ۲، ۳ .... (۱)

مسئلہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے کہ $\sum ھ_ن$ کے مستدق ہونے کے لیے (۱) کافی شرط ہے

اگر $\sum ھ_ن$ کے مقیاسوں کا سلسلہ یعنے $\sum |ھ_ن| = \sum \sqrt{عٍ^2 + وٍ^2}$

مستدق ہو، تو دیے ہوئے سلسلہ $\sum ھ_ن$ کو **مطلقاً مستدق** کہتے ہیں۔

اگر $\sum ھ_ن$ مطلق مستدق سلسلہ ہو تو سلسلے $\sum عٍ$ اور $\sum وٍ$ بھی

مطلق مستدق سلسلے ہونگے۔

چونکہ $|ع_ن| \leq |ھ_ن|$

اور $|ف_ن| \leq |ھ_ن|$

برعکس اس کے اگر $\sum ع_ن$ اور $\sum ف_ن$ مطلق مستدق سلسلے ہوں تو

$\sum ھ_ن$ بھی مطلق مستدق سلسلہ ہوگا۔

چونکہ $|ھ_ن| \leq |ع_ن| + |ف_ن|$

نوٹ۔ [مطلق مستدق سلسلہ کا مجموعہ، رقموں کی ترتیب پر منحصر نہیں ہوتا]

سلسلوں کا حاصل ضرب

چونکہ $(ع_ن + خ\, ف_ن)(عَ_م + خ\, فَ_م) = ع_ن\, عَ_م - ف_ن\, فَ_م + خ\, ع_ن\, فَ_م + خ\, ف_ن\, عَ_م$

اس لیے دو مطلق مستدق سلسلوں $\sum ھ_ن$ اور $\sum ھَ_ن$ کا حاصل ضرب مساوی ہے۔

$$\sum ع_ن \sum عَ_م - \sum ف_ن \sum فَ_م + خ \sum ع_ن \sum فَ_م + خ \sum ف_ن \sum عَ_م$$

اس لیے حاصل ضرب

$$ھ_1 ھَ_1 + (ھ_1 ھَ_2 + ھ_2 ھَ_1) + (ھ_1 ھَ_3 + ھ_2 ھَ_2 + ھ_3 ھَ_1) + \ldots\ldots$$

مطلق مستدق سلسلہ ہے۔

بہت سے سلسلے جن پر بحث کی جائیگی مطلق مستدق سلسلے ہونگے۔ چونکہ مطلق مستدق سلسلوں کا استدقاق مقیاسوں کے سلسلوں پر مبنی ہوتا ہے جو حقیقی رقموں والے سلسلے ہیں۔ اس لیے مثبت رقموں والے سلسلوں کے استدقاق کی جانچوں کا اطلاق مطلق مستدق سلسلوں پر ہوسکتا ہے۔

نسبتی جانچ اگر $\lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ھ_{ن-۱}}{ھ_ن} \right| < ۱$ ، تو سلسلہ $\sum_{۱}^{\infty} ھ_ن$ ، مطلق مستدق سلسلہ ہوگا۔

اگر $\lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ھ_{ن-۱}}{ھ_ن} \right| > ۱$ ، تو سلسلہ متسع ہوگا۔

اگر $\lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ھ_{ن+۱}}{ھ_ن} \right| = ۱$ ، تو مزید جانچ کی ضرورت ہوتی ہے۔

ایک ایسی جانچ حسب ذیل ہے۔

$$اگر \left| \frac{ھ_ن}{ھ_{ن+۱}} \right| = ۱ + \frac{مہ}{ن} + \frac{ھ_ن}{ن^۲}$$

جہاں مہ ایک مستقل ہے اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے $|ھ_ن|$ ایک ثابت عدد سے کم ہے تو سلسلہ $\sum ھ_ن$ مستدق ہوگا اگر مہ > ۱ اور متسع ہوگا اگر مہ ≤ ۱

مثال (۲) سلسلہ $\sum ھ_ن$ کے استدقاق پر بحث کرو

$$جہاں\ ھ_ن = \frac{ر^ن (جم\ ن\ طہ + غ\ جب\ ن\ طہ)}{ن}$$

مقیاسوں کا سلسلہ ہے $ر + \frac{ر^۲}{۲} + \frac{ر^۳}{۳} + \cdots\cdots + \frac{ر^ن}{ن} + \cdots\cdots$

نسبتی جانچ سے $\lim_{ن \to \infty} \left| \frac{ر^{ن+۱}}{ن+۱} \times \frac{ن}{ر^ن} \right| = ر$

اِس لیے سلسلہ $\sum ھ_ن$ مستدق ہوگا اگر $ر < ۱$

یعنے سلسلہ مستدق ہے اگر $|ھ_ن| < ۱$

مثال (۳) سلسلہ $\sum \frac{غ^ن}{ن}$ کے مطلق استدقاق پر بحث کرو۔

ہم سلسلہ کو ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$غ + \frac{غ^۲}{۲} + \frac{غ^۳}{۳} + \cdots\cdots = غ - \frac{۱}{۲} - \frac{غ}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{غ}{۵} - \frac{۱}{۶} - \cdots\cdots$$

جس سے $\sum$ عن = $-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\cdots\cdots\right)$

$\sum$ ون $=\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots\right)$

$\sum$ عن اور $\sum$ ون، دونوں مستدق سلسلے ہیں۔

لیکن $\sum$ |عن| اور $\sum$ |ون| یعنے

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$

اور $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$

دونوں مطلق مستدق سلسلے نہیں ہیں۔ اِس لیے دیا ہوا سلسلہ $\sum$ حن/ن، مطلق مستدق سلسلہ نہیں ہے۔

یہ اِس طرح بھی واضح ہے کہ

$\sum\left|\frac{ح^{ن}}{ن}\right| = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{ن}+\cdots\cdots$

جو متسع سلسلہ ہے۔

مثال (۴) ثابت کرو کہ اگر سلسلہ $\sum_{1}^{\infty}$ ھن مطلق مستدق ہو تو سلسلہ $\sum_{1}^{\infty}$ لوک (۱ + ھن) بھی مطلق مستدق ہوگا۔

ن کو اتنا بڑا منتخب کرو کہ |ھن| < ۱، تب

$|\text{لوک}(1+ھ_ن)| \leqq |ھ_ن| + \frac{|ھ_ن|^2}{2} + \cdots \leqq \frac{|ھ_ن|}{1-|ھ_ن|}$

اِس لیے ایک ایسا م معلوم ہو سکتا ہے کہ جب ن $\geqslant$ م تو

|لوک (۱ + ھن)| $\leqq$ ج |ھن|، جہاں ج ایک مستقل ہے جو ن کے

تابع نہیں ہے۔

اِس لیے اگر $\sum_{\text{م}}^{\text{م+ف}} |\text{ھن}| < \text{ﮧ}$، تو $\sum_{\text{م}}^{\text{م+ف}} |\text{لوک}(1+\text{ھن})| < \text{ج ﮧ}$

یعنے سلسلہ $\sum_{1}^{\infty} \text{لوک}(1+\text{ھن})$ مطلق مستدق سلسلہ ہے۔

۴۳۔ دوہرا سلسلہ

دوہرے لاتناہی قطار

$$
\begin{array}{l}
\text{ھ}_{11},\ \text{ھ}_{12},\ \text{ھ}_{13},\ \ldots\ldots\ \text{ھ}_{1\text{ن}},\ \ldots\ldots \\
\text{ھ}_{21},\ \text{ھ}_{22},\ \text{ھ}_{23},\ \ldots\ldots\ \text{ھ}_{2\text{ن}},\ \ldots\ldots \\
\text{ھ}_{31},\ \text{ھ}_{32},\ \text{ھ}_{33},\ \ldots\ldots\ \text{ھ}_{3\text{ن}},\ \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{ھ}_{\text{م}1},\ \text{ھ}_{\text{م}2},\ \text{ھ}_{\text{م}3},\ \ldots\ldots\ \text{ھ}_{\text{م}\text{ن}},\ \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

پر غور کرو جہاں $\text{ھ}_{\text{م ن}}$، اِس دوہرے قطار کی م ویں صف اور ن ویں ستون کی رقم کو ظاہر کرتا ہے۔ دوہری قطار کی ہر صف بائیں طرف لاتناہی تک پھیلی ہوئی ہے۔ اِسی طرح ہر ستون، نیچے کی طرف لاتناہی تک پھیلا ہوا ہے۔

اگر دوہری قطار کے اِن ارکان کا حاصل جمع لیا جائے تو نتیجہ کو دوہرا سلسلہ کہتے ہیں۔ اور اِس کو $\sum \text{ھ}_{\text{م ن}}$ .... (۲)

سے تعبیر کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{س}_{\text{م ن}}$ دی ہوئی دوہری قطار کی پہلی م صفوں اور ن ستونوں کے

اجزا کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔

اگر $\text{س}_{\text{م ن}}$ ایک معین محدود انتہا ھ کی طرف مائل ہو جبکہ م اور ن علٰحدہ علٰحدہ (یعنی غیر تطابع طور پر) لاتناہی کے طرف مائل ہو اور یہ انتہا م اور ن کے لاتناہی کی طرف مائل ہونے کے طریقہ پر منحصر نہ ہو، یعنے اگر

$$\underset{\substack{\text{م}\to\infty \\ \text{ن}\to\infty}}{\text{نہا}} \text{س}_{\text{م ن}} = \text{ھ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

تو کہا جاتا ہے کہ سلسلہ نمبر (۲) ھ کی طرف مستدق ہوتا ہے اور ھ کو اِس سلسلہ کا مجموعہ کہتے ہیں۔

اگر انتہا (۳) وجود نہ رکھتی ہو تو دوہرے سلسلہ کو متسع سلسلہ کہتے ہیں۔

اگر (۱) سے بننے والے سلسلہ کی ہر ایک رقم کا مقیاس لے کر (۱) کا مقیاسوں کا سلسلہ بنایا جاوے اور یہ مقیاسوں کا سلسلہ مستدق ہو تو اِبتدائی دیے ہوئے سلسلہ کو مطلقاً مستدق سلسلہ کہتے ہیں۔

دوہرے سلسلہ کا استدقاق:-

اگر $\text{س}_۱$ اور $\text{س}_۲$ ایسی ملتف مقداریں ہوں کہ $\left(\frac{\text{س}_۲}{\text{س}_۱}\right)$ حقیقی نہ ہو، تو دوہرا سلسلہ

$$\sum_{\text{م}=-\infty}^{+\infty} \sum_{\text{ن}=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(۲\text{م س}_۱ + ۲\text{ن س}_۲)^۳}$$

مطلقاً مستدق ہے۔ زبر کی علامت اِس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ وہ رقم جس کے لیے م = ن = صفر چھوڑ دی گئی ہے۔

[یہ فرض کرنا سہولت وہ ہے کہ $\frac{\text{س}_۲}{\text{س}_۱}$ کا خیالی حصہ صفر سے بڑا ہے۔ اگر ایسی صورت نہ ہو تو $\text{س}_۱$ اور $\text{س}_۲$ کو بدلو]

دوہرا سلسلہ $\sum_{\text{م}=-\infty}^{\text{م}=+\infty} \sum_{\text{ن}=-\infty}^{\text{ن}=+\infty}{}' \frac{1}{(۲\text{م س}_۱ + ۲\text{ن س}_۲)^۳}$ کی

بعض رقمیں ذیل کے قطار میں دکھائی گئی ہیں - بقیہ رقمیں بھی م اور ن کی قیمتیں بدلنے سے لکھی جا سکتی ہیں -

....

$$\cdots+\frac{1}{(-4\text{سہ}_1+4\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(-2\text{سہ}_1+4\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(4\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(2\text{سہ}_1+4\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(4\text{سہ}_1+4\text{سہ}_2)^3}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(-4\text{سہ}_1+2\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(-2\text{سہ}_1+2\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(2\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(2\text{سہ}_1+2\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(4\text{سہ}_1+2\text{سہ}_2)^3}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(-4\text{سہ}_1)^3}+\frac{1}{(-2\text{سہ}_1)^3}+\qquad+\frac{1}{(2\text{سہ}_1)^3}+\frac{1}{(4\text{سہ}_1)^3}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(-4\text{سہ}_1-2\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(-2\text{سہ}_1-2\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(-2\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(2\text{سہ}_1-2\text{سہ}_2)^3}+\frac{1}{(4\text{سہ}_1-2\text{سہ}_2)^3}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{}{(-4\text{سہ}_1-4\text{سہ}_2)^2}+\frac{}{(-2\text{سہ}_1-4\text{سہ}_2)^3}+\frac{}{(-4\text{سہ}_2)^3}+\frac{}{(2\text{سہ}_1-4\text{سہ}_2)^3}+\frac{}{(4\text{سہ}_1-4\text{سہ}_2)^3}+\cdots$$

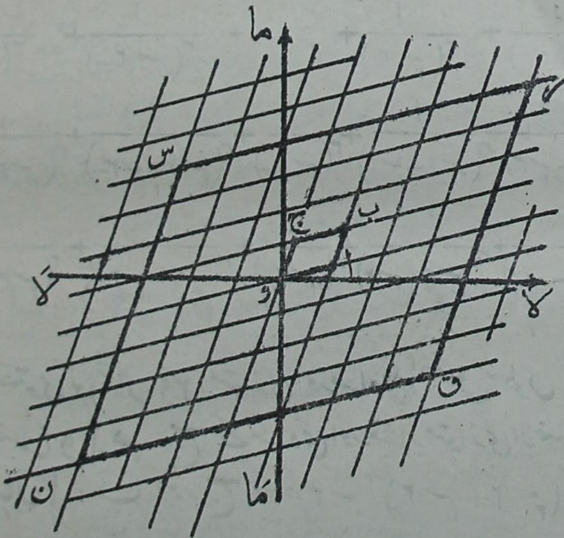
....

مستوی کو (شکل ۳۹) متوازی اور مساوی الفصل خطوں کے ذریعہ متوازی الاضلاع و ا ب ج کے مساوی اور متشابہ متوازی الاضلاعوں میں تقسیم کرو جہاں ا ، ب اور ج نقاط ۲ سہ_1 ، (۲ سہ_1 + ۲ سہ_2) ، اور ۲ سہ_2 ہیں - چونکہ $\frac{\text{سہ}_2}{\text{سہ}_1}$ کا خیالی حصہ صفر سے بڑا ہے اس لیے زاویہ ا و ج صفر اور π کے درمیان ہوگا -

سلسلہ کی ہر ایک رقم جال کے ایک ایک کونے کو تعبیر کرتی ہے - اس لیے نقاط (۲ م سہ_1 + ۲ ن سہ_2) جہاں م اور ن صحیح اعداد ہیں ملتف مستوی پر تعبیر ہوتے ہیں -

اُن کونوں پر غور کرو جو متوازی الاضلاع ن ق ر س پر واقع ہیں جن کے اضلاع کے وسطی نقاط ± ۲ ع سہ_1 ، ± ۲ ع سہ_2 ہیں جہاں ع

ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ ہر ایک ضلع پر (۲ ع + ۱) نقاط ہیں۔ اور چونکہ چار راسوں میں سے ہر ایک دو ضلعوں پر واقع ہیں اس لیے اس متوازی الاضلاع کے ۸ ع کونے ہیں۔



شکل (۳۹)

اب فرض کرو کہ و سے ا ب ، اور ب ج پر نکالے ہوئے عمودوں میں سے چھوٹے کا طول د ہے۔
تب ن ق ہ س پر کے ہر ایک کونے کے لیے۔

$$\left|\frac{1}{۲م سہ_۱ + ۲ن سہ_۲}\right| \geqslant \frac{1}{ع د}$$

یعنے $\sum \left|\frac{1}{۲م سہ_۱ + ۲ن سہ_۲}\right|^{۳} < \frac{۸ ع}{(ع د)^{۳}} = \frac{۸}{ع^{۲} د^{۳}}$

جہاں $\sum$ کی علامت، ن ق ر س پر کے تمام نقطوں کے لیے جمع کو تعبیر کرتی ہے۔

اب اگر ع کو یکے بعد دیگرے قیمتیں ۱، ۲، ۳ .... دیے جائیں تو مستوی کے تمام نقطے اِس میں شامل ہونگے۔ اِس لیے

$$\sum_{م=-\infty}^{+\infty} \sum_{ن=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{۲م سہ_۱ + ۲ن سہ_۲}\right|^{۳} < \frac{۸}{د^{۳}}\left(\frac{1}{۲^{۱}} + \frac{1}{۲^{۲}} + \frac{1}{۲^{۳}} + \cdots\cdots\right)$$

چونکہ دیے ہوئے سلسلہ کی ہر ایک رقم مطلق قیمت میں $\frac{1}{۲^{۱}} + \frac{1}{۲^{۲}} + \frac{1}{۲^{۳}} + \cdots\cdots$ کے ہر ایک رقم سے کم ہے اور پورا سلسلہ $\frac{۸}{د^{۳}}$ یعنے ایک محدود مستقل سے ضرب کھاتا ہے اِس لیے دیا ہوا دوہرا سلسلہ مطلق مستدق سلسلہ ہے۔

۴۴۔ یکساں استدقاق

سلسلہ کے یکساں اِستدقاق کی تعریف۔

سلسلہ، $ع_۰(ی) + ع_۱(ی) + ع_۲(ی) + \cdots\cdots + ع_ن(ی) + \cdots\cdots$ جسکی رقمیں ملتف متغیر ی کے تفاعل ہیں، مستوی کے ایک خطہ ا میں یکساں مستدق کہلاتا ہے اگر ہر ثبت عدد صہ کے جواب میں، خطہ ا کے اندر ی کی تمام قیمتوں کے لیے ایک ایسا ثبت صحیح عدد م جو ی پر منحصر نہیں ہے وجود رکھے کہ

$$\left| ک_ن \right| = \left| ع_{ن+۱}(ی) + ع_{ن+۲}(ی) + \cdots\cdots \right| < ص$$

جبکہ $ن \geqslant م$

یہ یاد رہے کہ یکساں استدقاق کا خطّہ، استدقاق کے خطّہ پر لازمًا منطبق نہیں ہوتا بلکہ اِستدقاق کے خطّہ کا کوئی حصہ ہو سکتا ہے۔ یکساں اِستدقاق کی جانچ کے لیے ہم وائرشٹراس کے مسئلہ کو ثابت کرینگے۔ اِس مسئلہ کی مدد سے اکثر سلسلوں کے یکساں اِستدقاق کی جانچ کی جا سکتی ہے۔

مسئلہ - فرض کرو کہ دیا ہوا سلسلہ ہے

$$ع_۱(ی) + ع_۲(ی) + \cdots\cdots + ع_ن(ی) + \cdots\cdots$$

اگر ایک دیے ہوے خطّہ ا میں ی کی تمام قیمتوں کے لیے

$\left| ع_ن(ی) \right| \leqslant ص_ن$، ن کی تمام قیمتوں کے لیے

جہاں $\sum ص_ن$، مثبت مستقلوں والا متدق سلسلہ ہے تو $\sum ع_ن(ی)$ خطّہ ا میں مطلق اور یکساں مستدق سلسلہ ہوگا۔

چونکہ $\left| ع_ن(ی) \right| \leqslant ص_ن$ اور $\sum ص_ن$ مستدق ہے

اس لیے مطلق اِستدقاق کے تعریف ہی سے ظاہر ہے کہ دیا ہوا سلسلہ مطلقًا مستدق ہے

چونکہ سلسلہ $\sum ص_ن$ متدق ہے، اِس لیے ایک ایسا عدد م معلوم کیا جا سکتا ہے کہ

$$\sum_{ن=م+۱}^{\infty} ص_ن < ص$$

نیز ہم لکھتے ہیں $\left| \sum_{م+۱}^{م+ف} ع_ن(ی) \right| \leqslant \sum_{م+۱}^{م+ف} ص_ن < \sum_{م+۱}^{\infty} ص_ن$، جہاں ف = ۱، ۲، ۳ ...

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\left|\text{مکام}(ی)\right| = \underset{ف \to \infty}{\text{نہیا}} \left|\sum_{م+1}^{م+ف} \text{عن}(ی)\right| < \epsilon \quad \text{جہاں} \quad \left|\text{مکام}(ی)\right| = \left|\text{ع}_{م+1}(ی) + \cdots\cdots\right|$$

چونکہ یہ رشتہ خطہ ا میں ی کی کسی قیمت پر منحصر نہیں ہے اِس لیے یکساں استدقاق کی شرط پوری ہوتی ہے۔

پس ثابت ہوا کہ دیا ہوا سلسلہ اوپر کے شرائط کے تحت خطہ ا میں مطلق اور یکساں مستدق سلسلہ ہے۔ یکساں اِستدقاق کے لیے یہ شرط کافی ہے، گر ضروری نہیں۔

مثال (۵) سلسلہ $\frac{1}{۱\cdot۳\cdot۵} + \frac{ی}{۳\cdot۵\cdot۷} + \frac{ی^2}{۵\cdot۷\cdot۹} + \cdots + \frac{ی^{ن-1}}{(۲ن-۱)(۲ن+۱)(۲ن+۳)} + \cdots\cdots$ کے یکساں اِستدقاق پر بحث کرو۔

یہ اُس خطہ کے اندر جو مبداء کے گرد کھنچے ہوئے اکائی نصف قطر والے دائرے کے اندر ہے یکساں طور پر مستدق سلسلہ ہے۔

مثال (۶) سلسلہ $ی - \frac{ی^3}{\lfloor۳} + \frac{ی^5}{\lfloor۵} - \frac{ی^7}{\lfloor۷} + \cdots\cdots$ کسی محدود خطہ کے اندر یکساں مستدق سلسلہ ہے۔

۴۵ - قوتی سلسلے

$\sum_{ن=۰}^{\infty} \text{لن}\, ی^ن$ یا $\sum_{ن=۰}^{\infty} \text{لن}\,(ی - ی_۰)^ن$ کی شکل کے سلسلے قوتی سلسلے کہلاتے ہیں۔ اگر لن اور ی ملتف مقداریں ہوں تو اِن کو ملتف رقموں کے قوتی سلسلے کہتے ہیں۔ چونکہ سلسلہ $\sum_{ن=۰}^{\infty} \text{لن}\,(ی - ی_۰)^ن$ کو شکل $\sum_{ن=۰}^{\infty} \text{لن}\, ی^ن$ میں آسانی کے ساتھ تبدیل کیا جا سکتا ہے اس لیے ہم سلسلہ $\sum_{ن=۰}^{\infty} \text{لن}\, ی^ن$ کو معیاری قوتی

سلسلہ لیں گے۔

جہاں تک مطلق اِستدقاق سے تعلق ہے جو کچھ حقیقی رقموں والے مطلق مستدق سلسلوں کے لیے درست ہے سلسلہ $\sum_{ن=۰}^{\infty} |ا_ن|\,|ی^ن|$ کے لیے بھی درست ہے کیونکہ مقیاسوں کا سلسلہ $|ا_۰| + |ا_۱|\,|ی| + |ا_۲|\,|ی^۲| + \cdots$ مثبت رقموں والا سلسلہ ہے۔

فرض کرو کہ $\sum_{ن=۰}^{\infty} ا_ن (ی - ی_۰)^ن$ ایک قوتی سلسلہ ہے اور نسبت

$\left|\frac{ا_ن}{ا_{ن+۱}}\right|$ ر کی طرف مائل ہوتی ہے جب ن، لاتناہی کی طرف مائل ہوجاتا ہے۔

اب اگر $\lim_{ن \to \infty} \left|\frac{ا_ن}{ا_{ن+۱}} \times \frac{(ی - ی_۰)^ن}{(ی - ی_۰)^{ن+۱}}\right| > ۱$، تو سلسلہ

$\sum_{ن=۰}^{\infty} ا_ن (ی - ی_۰)^ن$ مطلق مستدق سلسلہ ہے یعنے اگر

$$\lim_{ن \to \infty} \left|\frac{ا_ن}{ا_{ن+۱}}\right| \left|\frac{۱}{(ی - ی_۰)}\right| > ۱$$

یعنے $\lim_{ن \to \infty} \left|\frac{ا_ن}{ا_{ن+۱}}\right| > |ی - ی_۰|$

یعنے $ر > |ی - ی_۰|$ یعنے $|ی - ی_۰| < ر$

اِس سے حاصل ہوتا ہے کہ سلسلہ دائرہ $|ی - ی_۰| = ر$ کے اندر مطلقاً مستدق ہے۔ اِسی طرح سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ دائرہ $|ی - ی_۰| = ر$ کے باہر متسع ہے۔

دائرہ $|ی - ی_۰| = ر$ کو قوتی سلسلہ کا **دائرۂ استدقاق** کہتے ہیں اور ر کو **نصف قطر استدقاق** کہتے ہیں۔

یہی نتیجہ کوشی کی جذر والی جانچ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے، مثبت رقموں والا

سلسلہ $\sum$ عن مستدق یا متسع ہوگا بموجب اس کے کہ $\lim_{ن\to\infty} (ع_ن)^{\frac{1}{ن}} < > 1$

اگر ہم قوتی سلسلہ $\sum_{ن=0}^{\infty} ل_ن ی^ن$، پر اس جانچ کا اطلاق کریں اور

$\lim_{ن\to\infty} |ل_ن|^{\frac{1}{ن}} = \frac{1}{ر}$ لکھیں

تو سلسلہ $\sum_{ن=0}^{\infty} ل_ن ی^ن$ مطلقاً مستدق ہوگا اگر $\lim_{ن\to\infty} \{|ل_ن||ی^ن|\}^{\frac{1}{ن}} < 1$

یعنی $|ل_ن|^{\frac{1}{ن}} |ی| < 1$

یعنی $\frac{1}{ر} |ی| < 1$

یعنی $|ی| < ر$

اسی طرح سے یہ متسع ہوگا اگر $\frac{1}{ر} |ی| > 1$ یعنی $ی > ر$

اگر $|ی|$ یا $|ی - ی_0| = ر$ تو استدقاق یا اتساع کے بارے میں کچھ نہیں کہا جا سکتا۔ یہ ہو سکتا ہے کہ دائرہ $|ی| = ر$ کے ہر نقاط پر یہ مطلقاً مستدق ہو یا ایسے ہر نقطہ پر مشروطاً مستدق ہو یا بعض نقاط پر مشروطاً مستدق ہو اور بعض پر متسع یا آخر کار تمام نقاط پر متسع ہو۔

نوٹ۔ مستدق سلسلہ کو جو مطلقاً مستدق نہیں ہے **مشروط مستدق سلسلہ** کہتے ہیں۔

قوتی سلسلوں کا حاصل ضرب —— اگر دو سلسلے

$\sum_{ن=0}^{\infty} ل_ن ی^ن$ اور $\sum_{ن=0}^{\infty} ک_ن ی^ن$،

دائرہ $|ی| = ر$ کے اندر مستدق ہوں تو اُن کا حاصل ضرب

$$ا_۰ ب_۰ + (ا_۰ ب_۱ + ا_۱ ب_۰)\, ی + (ا_۰ ب_۲ + ا_۱ ب_۱ + ا_۲ ب_۰)\, ی^۲ + \cdots$$

بھی اس دائرے کے اندر مستدق ہوگا۔

مثال (۷) ثابت کرو کہ ہندسی سلسلہ $۱ + ی + ی^۲ + ی^۳ + \cdots\cdots$ کا نصف قطر استدقاق اکائی ہے۔

$$\text{نصف قطر استدقاق } ر = \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left| \frac{ا_ن}{ا_{ن+۱}} \right|$$

$$= \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left| \frac{۱}{۱} \right| = ۱$$

اس لیے ہندسی سلسلہ کا نصف قطر استدقاق اکائی ہے۔

مثال (۸) ثابت کرو کہ سلسلہ $\sum_{ن=۰}^{\infty} \underline{|ن}\; ی^ن$ کا نصف قطر استدقاق صفر ہے۔

$$\text{نصف قطر استدقاق } ر = \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left| \frac{ا_ن}{ا_{ن+۱}} \right|$$

$$= \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left| \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن+۱}} \right|$$

$$= \underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left| \frac{۱}{ن+۱} \right| = \text{صفر}$$

اب ہم ایک اہم مسئلہ ثابت کرتے ہیں۔

اگر $ف(ی) = \sum_{ن=۰}^{\infty} ا_ن ی^ن$، تو $ف(ی)$ قوتی سلسلہ $\sum_{ن=۰}^{\infty} ا_ن ی^ن$ کے دائرہ استدقاق کے اندر ہر نقطہ پر تحلیلی ہے۔

فرض کرو کہ $\sum ا_ن ی^ن$، $|ی| < ر$ کے اندر مستدق ہے۔

تب اگر $۰ < ک < ر$ تو $ا_ن ک^ن$ محدود ہے۔ فرض کرو کہ $|ا_ن ک^ن| < م$

نیز فرض کرو کہ فہ (ی) = $\sum_{ن=۱}^{\infty}$ ن لن یٰ$^{ن-۱}$

سہولت کی خاطر ہم |ی| = ر اور |ھ| = عا لکھتے ہیں ۔ تب اگر
ر < ک اور (ر + عا) < ک

$$\frac{ف(ی+ھ) - ف(ی)}{ھ} - فہ(ی) = \sum_{ن=۰}^{\infty} \left[لن \left\{ \frac{(ی+ھ)^{ن} - ی^{ن}}{ھ} - ن ی^{ن-۱} \right\} \right]$$

اب $\left| \frac{(ی+ھ)^{ن} - ی^{ن}}{ھ} - ن ی^{ن-۱} \right| = \left| \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱} ی^{ن-۲} ھ + \cdots\cdots + ھ^{ن-۱} \right|$

$$\leqq \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱} ر^{ن-۲} عا + \cdots\cdots + عا^{ن-۱}$$

$$= \frac{(ر+عا)^{ن} - ر^{ن}}{عا} - ن ر^{ن-۱}$$

اسلیے $\left| \frac{ف(ی+ھ) - ف(ی)}{ھ} - فہ(ی) \right| \leqq م \sum_{ن=۰}^{\infty} \frac{۱}{ک^{ن}} \left\{ \frac{(ر+عا)^{ن} - ر^{ن}}{عا} - ن ر^{ن-۱} \right\}$

$$= م \left\{ \frac{۱}{عا} \left(\frac{ک}{ک-ر-عا} - \frac{ک}{ک-ر} \right) - \frac{ک}{(ک-ر)^{۲}} \right\}$$

$$= \frac{م ک عا}{(ک-ر-عا)(ک-ر)^{۲}}$$

یعنے $\frac{م ک عا}{(ک-ر-عا)(ک-ر)^{۲}}$ ⟵ صفر جبکہ عا ⟵ صفر

یعنے ف (ی) کا مشتق فہ (ی) ہے ۔
اس سے ثابت ہوتا ہے کہ ف (ی) جو یک قیمتی ہے، تفرق پذیر بھی ہے ۔
اس لیے ف (ی)، دائرہ |ی| = ر کے اندر تحلیلی ہے ۔

چونکہ $\lim_{ن\to\infty}$ (ن)$^{\frac{۱}{ن}}$ ⟵ ۱ اسلیے $\lim_{ن\to\infty}$ |ن لن|$^{\frac{۱}{ن}}$ = $\lim_{ن\to\infty}$ |لن|$^{\frac{۱}{ن}}$ = $\frac{۱}{ر}$

اور اس لیے سلسلہ فہ (ی) = $\sum_{ن=1}^{\infty}$ ن لن ی^ن-۱، کا نصف قطر استدقاق

ابتدائی سلسلہ ف (ی) = $\sum^{\infty}$ لن ی^ن کے نصف قطر استدقاق کے مساوی ہے۔

اس طرح سے اگر فہ (ی) = فَ (ی)، |ی| < ر کے اندر تحلیلی ہو تو

اسی طرح سے بتا سکتے ہیں کہ فہ (ی) کا مشتق $\sum$ ن (ن - ۱) لن ی^ن-۲ ہے۔

اور اسی طرح سے

دوسرے الفاظ میں ہم **قوتی سلسلہ کو اُس کے دائرہ استدقاق کے اندر کسی نقطہ کے لیے جتنی مرتبہ چاہے رقم بہ رقم تفرق کر سکتے ہیں۔**

بالکل اسی کے مماثل مسئلہ تکمل کے لیے بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔

قوتی سلسلہ $\sum$ لن ی^ن کو اُس کے دائرہ استدقاق کے اندر کسی خطہ کے لیے رقم بہ رقم تکمل کیا جا سکتا ہے۔

مثال (۷) سلسلہ ی - ی^۳/[۳ + ی^۵/[۵ - ی^۷/[۷ + ... کا تفرقی سر معلوم کرو۔

کسی محدود خطہ کے اندر یہ سلسلہ ہموار مستدق ہے۔

اس کا مشتق سلسلہ ہے۔

۱ - ی^۲/[۲ + ی^۴/[۴ - ی^۶/[۶ + ...

اس لیے دوسرا سلسلہ پہلے سلسلہ کے تفرقی سر کو تعبیر کرتا ہے جبکہ پہلے سلسلہ کو رقم بہ رقم تفرق کیا گیا ہے۔

مثال (۸) ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-۱}(\text{ی}) = \text{ی} - \frac{\text{ی}^{۳}}{۳} + \frac{\text{ی}^{۵}}{۵} - \frac{\text{ی}^{۷}}{۷} + \cdots\cdots$$

$$\text{اب}\quad \frac{\text{فر}}{\text{فری}}(\text{مس}^{-۱}\,\text{ی}) = \frac{۱}{۱+\text{ی}^{۲}} = (۱+\text{ی}^{۲})^{-۱} = ۱ - \text{ی}^{۲} + \text{ی}^{۴} - \text{ی}^{۶} + \cdots$$

یہ قوتی سلسلہ ہے رقبہ (۰، ی) کے اندر مستدق ہے اِس لیے اِس کو رقم بہ رقم تکمل کیا جاسکتا ہے۔ اِس لیے

$$\int_{۰}^{\text{ی}} \frac{۱}{۱+\text{ی}^{۲}}\,\text{فری} = \int_{۰}^{\text{ی}} (۱ - \text{ی}^{۲} + \text{ی}^{۴} - \text{ی}^{۶} + \cdots\cdots)\,\text{فری}$$

$$\text{یعنے}\quad \text{مس}^{-۱}(\text{ی}) = \text{ی} - \frac{\text{ی}^{۳}}{۳} + \frac{\text{ی}^{۵}}{۵} - \frac{\text{ی}^{۷}}{۷} + \cdots\cdots$$

۴۶ - لامتناہی حاصل ضرب

فرض کرو کہ ہمارے پاس

$$(۱-\text{ھ}_{۱}),\ (۱+\text{ھ}_{۲}) \cdots\cdots,\ (۱+\text{ھ}_{\text{ن}}), \cdots\cdots$$

لامتناہی تواتر ہے۔ پہلے ن اجزا کے حاصل ضرب کو

$$\prod_{\text{ن}} \equiv \prod_{\text{ک}=۱}^{\text{ن}} (۱+\text{ھ}_{\text{ک}}) \quad \text{سے تعبیر کرینگے۔}$$

فرض کرو کہ ایک ایسا مثبت صحیح عدد $\text{م}_{۱}$ وجود رکھتا ہے کہ جب $\text{ک} \geq \text{م}_{۱}$ تو حاصل ضرب $\prod_{\text{ن}}$ کا کوئی جزو ضربی صفر کے مساوی نہیں ہے۔ جب حاصل ضرب $\prod_{\text{ن}}$ کا کوئی جزوی ضربی صفر کے مساوی نہ ہو تو حاصل ضرب $\prod_{\text{ن}}$ کو مستدق

کہتے ہیں اگر $\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نہا}} \prod_{م=۱} (۱ + \text{ھم})$ وجود رکھتی ہو اور صفر سے مختلف ہو۔

اگر حاصل ضرب صفر کی طرف مائل ہو یا لاتناہی ہو جائے یا ن کے بڑھنے پر اس کی کوئی انتہا نہ ہو تو لاتناہی حاصلِ ضرب متسع کہلاتا ہے۔

مسئلہ (۱) اِس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ ایک لاتناہی حاصل ضرب مستدق ہو یہ ہے کہ ہر مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک ایسا مثبت صحیح عدد م وجود رکھے کہ

$$\left| \prod_{ن+۱}^{ن+ف} (۱ + \text{ھم}) - ۱ \right| < \text{صہ}، \quad \text{ن کی تمام قیمتوں کیلئے جو م سے بڑی ہیں} \quad ف = ۱، ۲ \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

حاصل ضربوں کے تواتر

$$\prod_{۱}^{م+۱}، \quad \prod_{۱}^{م+۲}، \ldots\ldots، \prod_{۱}^{ن}، \ldots\ldots \quad ن > م \quad (۲)$$

پر غور کرو۔

اِس کے لیے ضروری اور کافی شرط کہ یہ تواتر مستدق ہو یہ ہے کہ ہر مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک ایسا صحیح عدد م وجود رکھے کہ

$$\left| \prod_{۱}^{ن+ف} - \prod_{۱}^{ن} \right| < \text{صہ}، \quad ن > م > م_۱ \ldots\ldots (۳) \quad ف = ۱، ۲، ۳، \ldots\ldots$$

اب ہم یہ بتائیں گے کہ یہ شرط وہی ہے جو مسئلہ (۱) میں دی گئی ہے۔ اگر دیا ہوا لاتناہی حاصل ضرب مستدق ہوں تو

$$\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نہا}} \prod_{۱}^{ن} = ۱ \neq \text{صفر}$$

تب ایک ایسا عدد $م_۲$ وجود رکھتا ہے کہ $ن > م_۱$ کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}}\right| > \text{مـ} \quad \text{..........} (۴)$$

نمبر ۳ کو نمبر ۴ پر تقسیم کرنے سے ہمیں ملتا ہے۔

$$\left|\frac{\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}+\text{ف}}}{\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}}} - ١\right| < \frac{\text{صہ}_1}{\text{مـ}} \qquad \text{ن} > \text{م}،\ \text{ف} = ١، ٢، ٣، \text{..........}$$

$\frac{\text{صہ}_1}{\text{مـ}} = \text{صہ}$، رکھنے سے نتیجہ کو شکل

$$\left|\Lambda_{\text{ن}+1}^{\text{ن}+\text{ف}} - ١\right| < \text{صہ} \qquad \text{ن} > \text{م}،\ \text{ف} = ١، ٢، ٣، \text{.......}$$

میں لکھ سکتے ہیں جو مسئلہ میں دی ہوئی شرط ہے۔

برعکس اس کے فرض کرو کہ ہم کو لاتساوی (١) دی گئی ہے۔ ہم لکھ سکتے ہیں

$$\left|\frac{\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}+\text{ف}}}{\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}}} - ١\right| \geq \left|\frac{\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}+\text{ف}}\right|}{\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}}\right|} - ١\right|$$

لیکن شرط (١) سے اور اوپر کے رشتہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\left|\frac{\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}+\text{ف}}\right|}{\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}}\right|} - ١\right| < \text{صہ}، \qquad \text{ن} > \text{م}،\ \text{ف} = ١، ٢، ٣، \text{...} (۵)$$

$$\text{یعنی} \quad -\text{صہ} < \frac{\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}+\text{ف}}\right|}{\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}}\right|} - ١ < \text{صہ}$$

$$\text{یا} \quad (١-\text{صہ})\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}}\right| < \left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}+\text{ف}}\right| < (١+\text{صہ})\left|\Lambda_{\text{م}_1}^{\text{ن}}\right| \qquad \text{ن} > \text{م}،\ \text{ف} = ١، ٢، ٣، \text{...} (٦)$$

فرض کرو کہ اب ہم ن کو م سے بڑی کوئی معین قیمت $(\text{م}_1 + \text{و})$ دیتے ہیں۔

چونکہ صہ اختیاری ہے اِس لیے (۶) سے حاصل ہوتا ہے کہ تواتر (۲) کا

ہر جز $\overset{\text{ن}}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}$ ، مطلق قیمت میں ن سے کم ہے جہاں ن محدود تواتر

$$\left|\overset{\text{م}_1+1}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| ، \left|\overset{\text{م}_1+2}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| ، \cdots\cdots ، \left|\overset{\text{م}_1+\text{و}-1}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| ، (1+\text{ک}) \left|\overset{\text{م}_1+\text{و}}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right|$$

میں سب سے بڑا مثبت عدد ہے اور ک صفر سے بڑا کوئی مستقل ہے۔

اِسی طرح سے ۲ کا ہر جز ایک مثبت عدد ن، سے مطلق قیمت میں بڑا ہے،

جہاں ن، محدود تواتر

$$\left|\overset{\text{م}_1+1}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| ، \left|\overset{\text{م}_1+2}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| ، \cdots\cdots ، \left|\overset{\text{م}_1+\text{و}-1}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| ، (1-\text{ک}) \left|\overset{\text{م}_1+\text{و}}{\underset{\text{م}}{\wedge}}\right|$$

میں سب سے چھوٹا عدد ہے۔

(۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\left|\overset{\text{ن}+\text{ف}}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}} - \overset{\text{ن}}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| < \text{صہ} \left|\overset{\text{ن}}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| \quad \text{ن} > \text{م} \quad \text{ف} = 1، 2، 3، \ldots$$

لیکن چونکہ $\left|\overset{\text{ن}}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| > \text{ن}$، اِس لیے $\text{صہ} = \frac{\text{ضہ}}{\text{ن}}$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے (جہاں ضہ

اختیاری چھوٹا عدد ہے)۔

$$\left|\overset{\text{ن}+\text{ف}}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}} - \overset{\text{ن}}{\underset{\text{م}_1}{\wedge}}\right| < \text{ضہ} \qquad \text{ف} = 1، 2، 3، \ldots\ldots\ldots$$

اِس لیے (۳) میں دی ہوئی شرط پوری ہوتی ہے اور $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \left|\overset{\text{ن}}{\underset{\text{م}}{\wedge}}\right|$ وجود رکھتی ہے۔

فرض کرو کہ یہ انتہا ا ہے چونکہ $\left|\overset{\text{ن}}{\underset{\text{م}}{\wedge}}\right|$ ہمیشہ مثبت عدد ن، سے بڑا ہے

اِس لیے حاصل ہوتا ہے کہ $\text{ا} \neq$ صفر۔ اِس لیے دیا ہوا تواتر مستدق ہے۔ پس

اوپر کا مسئلہ ثابت ہوا۔

اگر حاصل ضرب $\prod (1+|ھ_ک|)$ مستدق ہو تو حاصل ضرب $\prod (1+ھ_ک)$ کو **مطلقاً مستدق** کہتے ہیں۔

مسئلہ اگر سلسلہ $\sum_{ک=1}^{\infty} ھ_ک$ مطلقاً مستدق ہو تو لاتناہی حاصل ضرب

$$\prod_{ک=1}^{\infty} (1+ھ_ک)$$ مطلقاً مستدق ہوگا۔

سلسلہ $\sum ھ_ک$ کے اِستدقاق سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ $\prod_{ک=1}^{\infty}(1+ھ_ک)$ کے صرف محدود اجزائے ضربی صفر ہو سکتے ہیں۔ حسبِ سابق فرض کرو کہ جب $ک \geq م$، تو حاصل ضرب $\prod_{ک=1}^{\infty}(1+ھ_ک)$ کا کوئی جزو ضربی صفر کے مساوی نہیں ہے۔

تب اگر $ن > م_1$ تو ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$لوگ \prod_{ک=م_1}^{ن}(1+ھ_ک) = لوگ(1+ھ_{م_1}) + لوگ(1+ھ_{م_1+1}) + \cdots + لوگ(1+ھ_ن) \quad (۷)$$

دیا ہوا حاصل ضرب مطلقاً مستدق ہوگا اگر سلسلہ

$$لوگ(1+|ھ_{م_1}|) + لوگ(1+|ھ_{م_1+1}|) + \cdots + لوگ(1+|ھ_ک|) + \cdots \quad (۸)$$

مستدق ہو۔ لیکن یہ سلسلہ مستدق ہوگا اگر سلسلہ

$$|ھ_1| + |ھ_2| + \cdots + |ھ_ک| + \cdots \quad (۹)$$

مستدق ہو۔ کیونکہ اِن دو سلسلوں کے عام رقموں کی نسبت

$$\frac{لوگ(1+|ھ_ک|)}{|ھ_ک|}$$ مائل بہ ایک ہوتی ہے جب ک لاتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے۔ چونکہ مفروضہ سے سلسلہ (۹) مستدق ہے اِس لیے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

امثلہ نمبری (۸)

ی کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے مطلقاً مستدق ہیں۔

(۱) (۱) $۱ + \frac{ی}{\lfloor ۱} + \frac{ی^۲}{\lfloor ۲} + \frac{ی^۳}{\lfloor ۳} \cdots\cdots$

(۲) $۱ - \frac{ی^۲}{\lfloor ۲} + \frac{ی^۴}{\lfloor ۴} - \cdots\cdots$

(۳) $ی - \frac{ی^۳}{\lfloor ۳} + \frac{ی^۵}{\lfloor ۵} - \cdots\cdots$

(۲) ذیل کے سلسلوں کا نصف قطرِ استدقاق معلوم کرو۔

(ا) $۱ + ۴ی + ۹ی^۲ + ۱۶ی^۳ + \cdots\cdots$

(ب) $۱ + م\,ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲}\,ی^۲ + \cdots\cdots$

(ج) $۱ + ی + \frac{ی^۲}{\lfloor ۲} + \frac{ی^۳}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots$

(د) $ی - \frac{ی^۲}{۲} + \frac{ی^۳}{۳} - \frac{ی^۴}{۴} + \cdots\cdots$

(ع) $۱ + \frac{ی}{ل} + \frac{ی^۲}{ل^۲} + \frac{ی^۳}{ل^۳} + \cdots\cdots$

(۳) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$۱ + ا\,ی + \frac{ا(ا-۲ب)}{\lfloor ۲}\,ی^۲ + \frac{ا(ا-۳ب)^۲}{\lfloor ۳}\,ی^۳ + \cdots\cdots$$

کا نصف قطرِ استدقاق $\frac{ہ^{-۱}}{|ب|}$ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - ک\,ی + \frac{ک(ک-3)}{\lfloor 2}ی^2 - \frac{ک(ک-4)(ک-5)}{\lfloor 3}ی^3 \cdots\cdots$$

مستدق ہے اگر $|ی| < \frac{1}{4}$

(۵) ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 + \frac{ی}{\lfloor 1} + \frac{2م+2}{\lfloor 2}ی^2 + \cdots\cdots + \frac{(ن+م+2)(ن+م+3)\cdots\cdots(ن+م+ن)}{\lfloor ن}ی^ن + \cdots$$

مطلق مستدق ہے اگر $|ی| < \frac{م^م}{(م+1)^{م+1}}$ جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ سلسلہ $\sum_{-\infty}^{+\infty} ق^{ن^2}\, و^{2\pi غ ن ی}$، ی کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے اگر $|ق| < 1$

(۷) ذیل کے سلسلوں کے یکساں اِستدقاق پر بحث کرو۔

(ا) $1 + \frac{ی}{\lfloor 1} + \frac{ی^2}{\lfloor 2} + \frac{ی^3}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{ی^ن}{\lfloor ن} + \cdots\cdots\cdots$

(ب) $1 + \frac{ی}{\lfloor 1} + \frac{ی^2}{\lfloor 2} + \frac{ی^4}{\lfloor 3} + \cdots\cdots + \frac{ی^{2ن}}{\lfloor ن} + \cdots\cdots\cdots$

(۸) ثابت کرو کہ ذیل کے دو سلسلوں

(ا) $\frac{1}{2} \times \frac{ی-1}{1} + \frac{1\times3}{2\times4}\,\frac{(ی-1)^2}{2} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\,\frac{(ی-1)^3}{3} + \cdots\cdots\cdots$

(ب) $\frac{1}{2} \times \frac{1-ی}{1} + \frac{1\times3}{2\times4}\,\frac{(1-ی)^2}{2} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\,\frac{(1-ی)^3}{3} + \cdots\cdots\cdots$

کے اِستدقاق کے خطّے (Regions of Convergence) مساوی ہیں۔

(۹) سلسلہ

$$\frac{1}{1\times2\times3} + \frac{ی}{2\times3\times4} + \frac{ی^2}{3\times4\times5} + \cdots\cdots\cdots$$

کو تفرق کرکے اِس کے پہلے اور دوسرے تفرقی سلسلے معلوم کرو - نیز اس کی تصدیق کرو کہ تفرقی سلسلوں کا دائرہ استدقاق وہی ہے جو ابتدائی سلسلہ کا ہے ۔

(۱۰) پھیلاؤ اخذ کرو۔

$$\text{جب}^{-1}\,\text{ی} = \int_{\text{ب}}^{\text{ی}} \frac{\text{فری}}{\sqrt{1-\text{ی}^2}} = \text{ی} + \frac{1}{2}\times\frac{\text{ی}^3}{3} + \frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{\text{ی}^5}{5} + \cdots$$

$$\int \frac{\text{ی فری}}{\text{جم ی}} = \frac{\text{ی}^2}{2} + \frac{\text{ی}^4}{4.\lfloor 2} + \frac{5\,\text{ی}^6}{6.\lfloor 4} + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1+\text{ی}} = 1 - \text{ی} + \text{ی}^2 + \cdots\cdots\cdots$$

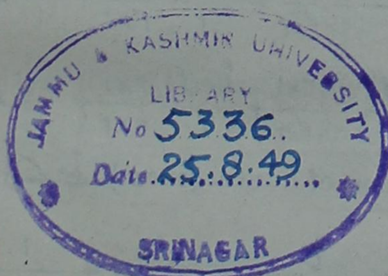
(۱۱) ثابت کرو کہ لاتناہی حاصل ضرب

$$\prod_{\text{ی}=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ی}^2}\right)$$ مطلقاً مستدق ہے۔

(۱۲) ۴۳ کی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\sum_{\text{م}=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{\text{ن}=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(2\,\text{م}\,\text{س}_1 + 2\,\text{ن}\,\text{س}_2)^{\text{ل}}}$$ مطلق مستدق ہے اگر ل > ۲ ۔

تمت



فہرست اصطلاحات

ملتف متغیر کے تفاعل

A

Absolute convergence.	مطلق اِستدقاق
Amplitude.	دلیل (سعت)
Angular point.	کونہ (زاویائی نقطہ)

B

Barrier.	سرحد
Bilinear transformation.	دو خطی بدل (استحالہ)
Branches.	شاخیں
Branch points.	شاخ نقطے

C

Circle of convergence.	دائرۂ اِستدقاق
Circuit.	دَور
Circular function.	دائری تفاعل (مستدیر تفاعل)
Complex.	ملتف
Complex number.	ملتف عدد
Complex variable.	ملتف متغیر
Conformal representation.	ہم شکل تعبیر

Conjugate.	مزدوج
Conjugate function.	مزدوج تفاعل
Conjugate numbers.	مزدوج اعداد
Continuity.	تسلسل
Contour.	گھیرا (حائط)
Convergence.	اِستدقاق
Cross-cut.	ترچھی کاٹ
Curvilinear integral.	منحنی (منحنی خطی) تکملہ

D

Definite integral.	محدود تکملہ
Derivative.	مشتق
Direction.	سمت
Divergent.	متسع
Domain.	علاقہ
Double integral	دوہرا تکملہ
Double series.	دوہرا سلسلہ

E

Essential singularity	خاص نادریت (ندرت)
Exponential function	قوت نمائی تفاعل

F

Function.	تفاعل

G

Gradient.	ڈھال (میلان)

H

Harmonic Function.	موسیقی تفاعل

Holomorphic.	تحلیلی (کل تحلیلی)
Hyperbolic function.	زائدی تفاعل
Hypergeometric series.	اعلیٰ ہندسی سلسلہ

I

Infinity.	لامتناہی (لاتناہی)
Integration.	تکمل
Inverse point.	مقلوب نقطہ
Inversion.	تقلیب
Isolated singularity.	جداگانہ نادریت (مجرد ندرت)

L

Limit.	انتہا
Linear transformation.	خطی بدل (خطی استحالہ)

M

Magnitude.	مقدار (قدر)
Meromorphic function.	جزوی طور پر (جز) تحلیلی تفاعل
Modulus.	مقیاس
Multiply-connected regions.	ضعفی طور پر ملے ہوئے (ضعف مربوط) خطّے
Multiply-valued function.	کثیر قیمتی تفاعل

N

Non-isolated.	غیر جداگانہ (غیر مجرد)

O

Ordinary point.	سادہ نقطہ
Orthogonal system.	علی القوائم نظام

P

Partial integration.	جزوی تکمل

Path of variation.	تغیر کا راستہ
Periodicity.	دوریت
Pole.	قطب
Power series.	قوتی سلسلہ
Principal value.	صدر قیمت

R

Radius of convergence.	نصف قطر استدقاق
Rational.	منطق (ناطق)
Ratio-test.	نسبتی جانچ
Region.	خطہ

S

Segment	مقطوعہ (قطعہ)
Sequence.	تواتر
Series.	سلسلہ
Simply-connected region.	سادہ طور پر ملا ہوا (بسیط مربوط) خطہ
Singularity.	نادریت (ندرت)

T

Transformation.	بدل (استحالہ)

U

Uniform continuity.	یکساں تسلسل
Uniform function.	یکساں (ہموار) تفاعل

V

Vector.	سمتیہ (سمتی)

Z

Zero.	صفر

صحت نامہ

ملتف متغیر کے تفاعل

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴	۱۷	یگانا	یگانہ	۵۸و۶۱	۱۱و۱۹	نظریہ	نظریے
۸	۱۲	فرق مقیاس	فرق کا مقیاس	۶۴	۱۳	+ معف لا	+ مف لا
۱۶	۱۲	متشابہ ہو	متشابہ ہوں	۷۲	۱۸	تکمیل	تکمل
۲۵	۱	$-\frac{ا - سہ^{ن}}{ا - سہ}$	$\frac{ا - سہ^{ن}}{ا - سہ}$	۷۳	۱۴	فہ(یٰ، ۰)	فہ(ی)
۳۰	۱۹	سخ جب ۱۳ط	- خ جب ۱۳ط	۷۶	۶	۶ - خ و	۶ + خ و
۳۱	۹	Points	Points	۷۸	۱۸	سے کوئی	سے ی کی
				۸۵	۱۲	اجزائی ضربی	اجزائے ضربی
۳۲	۶	$=\overline{ا جم ک ط}$	$=\overline{ا + جم ک ط}$	۹۶	۱۳	میخنی	منحنی
				۹۹	۱۰	کرد	گرد
۳۶	۱۱	$\sum_{ن=۱-}^{\infty}$	$\sum_{ن=۱}^{\infty}$	//	۱۴	دو دفعہ کرے	دو دفعہ حرکت کرے
۳۸	۸	$\left[\frac{(ی + یَ^{۰})}{ن}\right]$	$\left[\frac{(ی + یَ)^{ن}}{ن}\right]$	۱۰۰	۱۳	اس طرح ی۲	اس طرح ی۱
				۱۰۱	۵	میں۲	میں۱
۶	۱۲	ہوخ ا	وخ ا	۱۰۲	۱۴	مس ا $\frac{۱}{۲}$	مس ا $\frac{۱}{۲}$
۴۴	۱۰	$\frac{(خ ی ۱)^{ن}}{ا ن}$	$\frac{(خ ی)^{ن}}{ن}$	۱۰۴	۱	ہ کی قیمت ہ	ہ کی قیمت ہ
				//	۱۲	تفاعلوں کی	تفاعلوں کو
۴۸	۱	ع(۲ن π	+خ(۲ن π	۱۰۸	۸	ابدل	ابدال
//	۲،۳،۴	مس ا(جم لا مس لا)]	مس ا(جم لا مس لا)]	۱۱۰	۱۳	عمل کے	عمل کرکے

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۱۴	۱۱	لا۲ = لا۳ / ۱۱	لا۲ = لا۳ / ۱۱
۱۱۸	۶	اور = ب و خ لا	اور عہ = ب و خ لہ
۱۲۵	۱۴	ر — ی = ۱	ر = ۱ ی ۱ = ۱
۱۲۹	۹	۲ لا / جم۲ ما	۲۶ / جم۲ ما
۱۳۰	۷	خیال لینے	خیال لینے سے
۱۳۵	۳	مددے	مدد سے
۱۴۵	۵	ھروما	د فرما
۱۵۰	۵	بند گھیرا	بند گھیرا
۱۵۵	۱۸	اس پر باقی	اس پر بھی باقی
۱۶۰	۲	اندر ہیں	اندر ہے
"	۷	نکال جاتی	نکالی جاتی
۱۶۳	۳	کی جاتی تو	کی جاتیں تو
۱۶۴	۱۲	تکملؔ	متکمل
۱۶۶	۱۰	خ و (لا - ۱ - خ ب) / ۲	خ و (لا - ۹ - خ ب) / ۲

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۶۸	۶	معلوبہ	مطلوبہ
۱۷۲	۲	۳ خ π / و	۳ خ π / ۴ و
۱۷۳	۶	۲ / ۲ √ ۲ خ ۲ ا ۳	۱ / ۲ √ ۲ خ ۲ ا ۳
۱۷۴	سوال نمبر ۹	ق∞	ق∞ ب
۱۷۴	۱۰	متکمل	تکمیل
۱۸۱	۵	∑ (ن = ۱ تا ∞) ھن	∑ (ن = ۱ تا ∞) ھن
۱۸۵	۱	تابع	تابع
۱۹۳	۵	ای ان آف	ای ان آف
۱۹۴	۸	استقاق	اشتقاق
۱۹۶	۸	جتنی مرتبہ چاہے	جتنی مرتبہ چاہیں
۱۹۷	۱۰	(۱ - ھ۱)	(۱ + ھ۱)

